2027학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2026. 09. 08.(화)

■ [공통: 수학 Ⅰ·수학 Ⅱ]

01. ④	02. ③	03. ②	04. ②	05. ①
06. ⑤	07. ②	08. ③	09. ①	10. ③
11. ③	12. ④	13. ⑤	14. ⑤	15. ④
16. 6	17. 11	18. 38	19. 15	20. 17
21. 12	22. 97			

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2^{\frac{3}{2}} \times 4^{-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{-1}$

$= 2^{\frac{3}{2}-1}$

$= 2^{\frac{1}{2}}$

정답 ④

2. 출제의도 : 다항함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 2x^3 - x - 4$에서

$f'(x) = 6x^2 - 1$

따라서

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$

$= 6 \times 2^2 - 1 = 23$

정답 ③

3. 출제의도 : 등차수열의 성질을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_{10} - a_7 = 9$에서 $3d = 9$, $d = 3$

따라서

$a_7 = a_2 + 5d$

$= 2 + 5 \times 3 = 17$

정답 ②

4. 출제의도 : 함수의 연속을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x = 2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (7x + a) = 14 + a$

$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x^2 + ax) = 4 + 2a$

$f(2) = 14 + a$

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2)$에서

$14 + a = 4 + 2a$

따라서 $a = 10$

정답 ②

5. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^2 (2x^3+6x^2-x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4+2x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 2^4+2\times 2^3-\frac{1}{2}\times 2^2$$

$$=22$$

정답 ①

6. 출제의도 : 삼각함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

a, b가 양수이므로 함수

$f(x)=a\sin\frac{x}{b}+2$의 최댓값은 $a+2$이고,

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{b}}=2b\pi$이다.

$a+2=5$에서 $a=3$

$2b\pi=8\pi$에서 $b=4$

따라서 $a+b=3+4=7$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 도함수를 활용하여 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+ax^2-4ax$에서

$f'(x)=6x^2+2ax-4a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=6+2a-4a=0$, $a=3$

따라서 $f'(x)=6x^2+6x-12$

$f'(x)=0$에서 $6(x+2)(x-1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$이고

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이므로

극댓값은

$f(-2)$

$=2\times(-2)^3+3\times(-2)^2-12\times(-2)$

$=20$

정답 ②

8. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 공비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_n=a_1\times r^{n-1}$ $(n\geq 1)$

이고,

$S_3=a_1+a_2+a_3$

이므로

$$\frac{S_3}{a_1+2a_2}=\frac{7}{3}$$

에서

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+2a_2}=\frac{7}{3}$$

$$\frac{a_1+a_1r+a_1r^2}{a_1+2a_1r}=\frac{7}{3}$$

$a_1\neq 0$이므로

$$\frac{1+r+r^2}{1+2r}=\frac{7}{3}$$

$3+3r+3r^2=7+14r$

$3r^2-11r-4=0$

$(3r+1)(r-4)=0$

$r>0$이므로 $r=4$

따라서

$$\frac{a_8}{a_6}=\frac{a_6\times r^2}{a_6}$$

$=r^2$

$=4^2=16$

정답 ③

9. 출제의도 : 미분을 이용하여 두 점의 가속도의 차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하고 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 하자.

$$v_1(t)=\frac{dx_1}{dt}=12t^2-2t-11$$

$$v_2(t)=\frac{dx_2}{dt}=4t+7$$

두 점의 속도가 같아지는 시각 t는

$12t^2-2t-11=4t+7$에서

$6(2t-3)(t+1)=0$

$t\geq 0$이므로

$$t=\frac{3}{2}$$

$$a_1(t)=\frac{dv_1}{dt}=24t-2$$

$$a_2(t)=\frac{dv_2}{dt}=4$$

따라서

$$p=a_1\left(\frac{3}{2}\right)=24\times\frac{3}{2}-2=34$$

$$q=a_2\left(\frac{3}{2}\right)=4$$

이므로

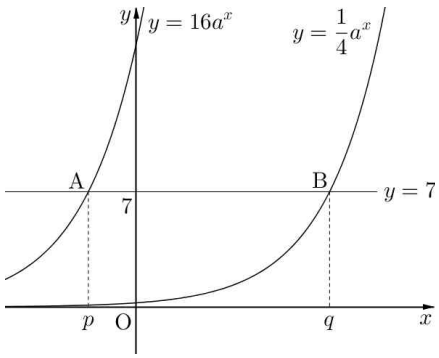
$p-q=34-4=30$

정답 ①

10. 출제의도 : 지수함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a>1$이므로 두 함수 $y=16a^x$, $y=\frac{1}{4}a^x$의 그래프와 직선 $y=7$을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



두 점 A, B의 x좌표를 각각 p, q라 하면

$16a^p=7$, $\frac{1}{4}a^q=7$ …… ㉠

$\overline{AB}=4$에서 $q=p+4$ …… ㉡

㉠에서 $16a^p=\frac{1}{4}a^q$이므로 ㉡을 대입하면

$$16a^p=\frac{1}{4}a^{p+4}$$

$64a^p=a^p\times a^4$

$a^p > 0$이므로

$a^4 = 64 = 2^6$에서

$a = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

정답 ③

11. 출제의도 : 적분과 미분의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고, 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_{-1}^{x} f(t)dt = xf(x) - 2x^3 - 3x^2 + 6 \quad \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x = -1$을 대입하면

$0 = -f(-1) + 2 - 3 + 6$

$f(-1) = 5 \quad \cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 - 6x$

$xf'(x) = 6x^2 + 6x$

$x \neq 0$일 때 $f'(x) = 6x + 6$이다.

다항함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (6x + 6) = 6$

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(x) = 6x + 6$

$f(x) = \int (6x + 6)dx = 3x^2 + 6x + C$ (단, C는 적분상수)

㉡에서 $f(-1) = 5$이므로

$3 - 6 + C = 5, \ C = 8$

따라서 $f(0) = 8$

정답 ③

12. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC}\cos(\angle BAC)$

$= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{8}$

$= 36$

이므로 $\overline{BC} = 6$

$\sin^2(\angle BAC) = 1 - \cos^2(\angle BAC)$

$= 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{63}{64}$

이고 $\angle BAC$는 삼각형의 내각이므로

$\sin(\angle BAC) = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2R$에서

$2R = \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{16}{\sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$

두 삼각형 ABC와 CBD의 외접원이 일치하므로 삼각형 CBD의 외접원의 반지름의 길이도 R이고 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 2R$에서

$\overline{BD} = 2R\sin(\angle BCD)$

$= \frac{16\sqrt{7}}{7} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = 4\sqrt{2}$

정답 ④

13. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 6이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=6x(x-t)$라 하면

$$\int_0^2 6x(x-t)dx=\left[2x^3-3tx^2\right]_0^2=16-12t=4$$

에서 $t=1$

즉 $f(x)=6x(x-1)$이다.

ㄱ.

$$\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2|6x(x-1)|dx$$

$$=\int_0^1\{-6x(x-1)\}dx+\int_1^2 6x(x-1)dx$$

$$=\left[-2x^3+3x^2\right]_0^1+\left[2x^3-3x^2\right]_1^2$$

$=1+5=6$ (참)

ㄴ. 일차함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)=0$이므로

0이 아닌 실수 m에 대하여

$g(x)=m(x-1)$이라 하면

$$\int_0^2(f(x)+g(x))dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 g(x)dx$$

에서

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2 m(x-1)dx$$

$$=m\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^2=0$$

이고 $\int_0^2 f(x)dx=4$이므로

$$\int_0^2(f(x)+g(x))dx=4$$ (참)

ㄷ. 조건에서 $\int_0^2 f(x)dx=4$이므로

$$\int_0^2(f(x)+h(x))dx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 h(x)dx$$

$$=4+\int_0^2 h(x)dx=4$$

에서

$$\int_0^2 h(x)dx=0$$

함수 $h(x)$가 일차함수이므로

$\int_0^2 h(x)dx=2h(1)=0$에서 $h(1)=0$이다.

따라서 0이 아닌 실수 a에 대하여

$h(x)=a(x-1)$이라 하자.

$f(x)+h(x)=6x(x-1)+a(x-1)$

$=(6x+a)(x-1)$

$0\le x\le 2$에서 $\int_0^2|f(x)+h(x)|dx>6$임을 보이자.

$a>0$일 때 $0\le x\le 2$에서

$$|(6x+a)(x-1)|=(6x+a)|x-1|$$
$$=6x|x-1|+a|x-1|$$
$$=|f(x)|+a|x-1|$$

$$\int_0^2|f(x)+h(x)|dx$$

$$=\int_0^2|f(x)|dx+\int_0^2|a(x-1)|dx$$

이고

$$\int_0^2|a(x-1)|dx$$

$$=a\left\{\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx\right\}$$

$$=a\left\{\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2\right\}$$

$=a$

이므로

$$\int_0^2|f(x)+h(x)|dx=6+a>6$$

따라서 조건을 만족시키는 일차함수 $h(x)$가 존재한다. (참)
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

14. 출제의도 : 거듭제곱근의 성질을 활용하여 주어진 식의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=F(n)$이라 하자.

함수 $f(x)$의 정의에 의하여

(i) $\sqrt[3]{k}$가 자연수, 즉 k가 어떤 자연수의 세제곱꼴일 때

$f(\sqrt[3]{k})=\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$이므로

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}}{5\times\frac{1}{k}}=\frac{k^{\frac{2}{3}}}{5}$$

(ii) $\sqrt[3]{k}$가 자연수가 아닐 때, 즉 k가 어떤 자연수의 세제곱꼴이 아닐 때

$f(\sqrt[3]{k})=5$이므로

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=\frac{5}{5\times\frac{1}{k}}=k$$

(i)에서 k가 어떤 자연수의 세제곱꼴, 즉 $k=m^3$(m은 자연수)이면

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=\frac{m^2}{5}$$

(ii)에서 k가 어떤 자연수의 세제곱꼴이 아니면 $\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}$의 값은 항상 자연수이다. …… (*)

즉, $F(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하기 위해서는 n이 어떤 자연수의 세제곱꼴이 될 때를 기준으로 경우를 나누어 살펴보아야 한다.

① $n=1(=1^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{1})}{5f(1)}=\frac{1^2}{5}=\frac{1}{5}$이다.

그러므로 (*)에 의하여 $1\le n<8$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은

$\frac{1}{5}$+(자연수)의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

② $n=8(=2^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{8})}{5f(8)}=\frac{2^2}{5}=\frac{4}{5}$이다.

즉, $F(8)$의 값은 $\frac{1}{5}$+(자연수)+$\frac{4}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $8\le n<27$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은 자연수이다.

③ $n=27(=3^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{27})}{5f(27)}=\frac{3^2}{5}=\frac{9}{5}$이다.

즉, $F(27)$의 값은 (자연수)+$\frac{9}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

그러므로 (*)에 의하여 $27\le n<64$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은

(자연수)+$\frac{4}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

④ $n=64(=4^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{64})}{5f(64)}=\frac{4^2}{5}=\frac{16}{5}$이다.

즉, $F(64)$의 값은 (자연수)$+\frac{4}{5}+\frac{16}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $64 \le n < 125$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은 자연수이다.

⑤ $n=125(=5^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{125})}{5f(125)}=\frac{5^2}{5}=5$이다.

즉, $F(125)$의 값은 (자연수)$+5$의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $125 \le n < 216$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은 자연수이다.

⑥ $n=216(=6^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{216})}{5f(216)}=\frac{6^2}{5}=\frac{36}{5}$이다.

즉, $F(216)$의 값은 (자연수)$+\frac{36}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

이때 $7^3=343>300$이므로 (*)에 의하여 $216 \le n \le 300$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은 (자연수)$+\frac{36}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

① ~ ⑥에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 n의 값의 범위는

$8 \le n < 27$ 또는 $64 \le n < 216$

이고, 그 개수는

$(27-8)+(216-64)=19+152=171$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+px+q$(단, p, q는 상수)

라 하자.

$g(x)=f(x)+f(x-t)$라 하면

$g(x)=x^2+px+q+(x-t)^2+p(x-t)+q$

$\quad=2x^2+2(p-t)x+t^2-pt+2q$

이다.

모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{(2x+1)f(x)}{f(x)+f(x-t)}=\lim_{x\to a}\frac{(2x+1)f(x)}{g(x)}$

의 극한이 존재하기 위해서는 분모의 $g(x)=0$인 실수 x가 존재하지 않거나 $g(x)=0$인 실수 x에 대하여 분자의 값이 모두 0이 되어야 한다. 이때 방정식 $g(x)=0$이 중근을 가지면 분자도 그 근을 중근으로 가져야 한다.

x에 대한 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(p-t)^2-2(t^2-pt+2q)=p^2-4q-t^2$

이고 D의 부호에 따라 주어진 극한이 존재하는 t의 값의 범위를 구할 수 있다.

(i) $D<0$인 경우

$g(x)=0$인 실수 x가 존재하지 않으므로 모든 실수 a에 대하여 주어진 극한이 존재한다.

(ii) $D>0$인 경우

$g(x)=0$인 실수 x의 값은 2개가 존재하고 t의 값에 따라 변한다. 하지만 분자의 방정식 $(2x+1)f(x)=0$의 근은 t와 관계없는 상수이고 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다. 이때 t의 값이 변함에 따라

달라지는 방정식 $g(x)=0$의 근이 고정된 방정식 $(2x+1)f(x)=0$의 근과 일치할 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $D=0$인 경우

$g(x)$는 완전제곱식이고 방정식 $g(x)=0$의 근을 방정식 $(2x+1)f(x)=0$도 중근으로 가져야 한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $t \geq \frac{3}{2}$에서 주어진 극한이 존재하기 위해서는 $t=\frac{3}{2}$일 때 $D=0$이고 $t>\frac{3}{2}$일 때 $D \leq 0$이어야 한다.

$p^2-4q-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0$에서

$p^2-4q=\frac{9}{4}$ … ㉠

$t=\frac{3}{2}$일 때 방정식 $g(x)=0$이 중근을 가지고 그 중근은

$x=-\frac{p-\frac{3}{2}}{2}=\frac{3-2p}{4}$

이다.

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식

$p^2-4q=\frac{9}{4}>0$

이므로 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 $(2x+1)f(x)=0$이 중근을 갖기 위해서는 $x=-\frac{1}{2}$이 중근이고 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이어야 한다.

$\frac{3-2p}{4}=-\frac{1}{2}$에서 $p=\frac{5}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$에서

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)p+q=0$

$\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+q=0$

이므로 $q=1$

따라서 $f(x)=x^2+\frac{5}{2}x+1$이므로

$f(2)=2^2+\frac{5}{2}\times 2+1=10$

정답 ④

16. 출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_3(x-3)=\log_9(2x-3)$

에서 진수 조건에 의하여

$x-3>0,\ 2x-3>0$

즉, $x>3$

$\log_3(x-3)=\log_9(x-3)^2$

이므로

$\log_9(x-3)^2=\log_9(2x-3)$

에서

$(x-3)^2=2x-3$

$x^2-6x+9=2x-3$

$x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$

$x>3$이므로

$x=6$

정답 6

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=6x^2-2x$에서

$f(x)=\int(6x^2-2x)dx$

$=2x^3-x^2+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=10$에서 $C=10$

따라서 $f(x)=2x^3-x^2+10$이므로

$f(1)=2-1+10=11$

정답 11

18. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=28$로 짝수이므로

$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times28=14$

$a_2=14$로 짝수이므로

$a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\times14=7$

$a_3=7$로 홀수이므로

$a_4=2a_3+12=2\times7+12=26$

$a_4=26$으로 짝수이므로

$a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}\times26=13$

$a_5=13$으로 홀수이므로

$a_6=2a_5+12=2\times13+12=38$

정답 38

19. 출제의도 : 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2-x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-1$

직선과 곡선이 접하는 점의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=3t^2-6t-1=8$에서

$3t^2-6t-9=0,\ 3(t+1)(t-3)=0$

$t=-1$ 또는 $t=3$

기울기가 8이고 y절편이 양수인 직선의 방정식을 $y=8x+a$(a는 $a>0$인 상수)라 하면

(ⅰ) $t=-1$일 때

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2-(-1)+2=-1$

이므로

$-1=8\times(-1)+a,\ a=7$

(ⅱ) $t=3$일 때

$f(3)=3^3-3\times3^2-3+2=-1$이므로

$-1=8\times3+a,\ a=-25$이고 이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 직선의 방정식은 $y=8x+7$

이 직선이 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=8\times1+7=15$

정답 15

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 E라 하자.

곡선 $y=g(x)$가 점 E를 지나고, 두 점 A, D가 점 E에 대하여 대칭이므로

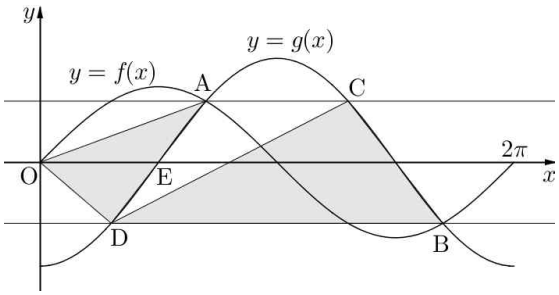
점 A의 x좌표를 a라 하면

점 D의 x좌표는 $\pi-a$이다.

또, 두 점 B, D는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 점 B의 x좌표는 $\pi+a$이다.

즉, 두 점 B, D의 좌표는 다음과 같다.

B($\boxed{\pi+a}$, $-\sin a$), D($\boxed{\pi-a}$, $-\sin a$)



삼각형 CDB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DB}}\times 2\sin a=\frac{1}{2}\times 2a\times 2\sin a$$

$$=2a\sin a$$

선분 AD가 x축과 만나는 점이 E이므로 삼각형 AOD의 넓이는 삼각형 AOE와 삼각형 ODE의 넓이의 합과 같다.

즉

(삼각형 AOD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OE}}\times\sin a+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OE}}\times\sin a$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\sin a\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\sin a$$

(삼각형 AOD의 넓이)

$$=\frac{5}{14}\times\text{(삼각형 CDB의 넓이)}$$

이므로

$$\frac{\pi}{2}\sin a=\frac{5}{14}\times 2a\sin a$$

에서 $a=\boxed{\frac{7}{10}\pi}$이다.

따라서 $k=-\tan\left(\boxed{\frac{7}{10}\pi}\right)$이다.

이때

$$p(a)=\pi+a,\ q(a)=\pi-a,\ \alpha=\frac{7}{10}\pi$$

이므로

$$p(\alpha)=p\left(\frac{7}{10}\pi\right)=\pi+\frac{7}{10}\pi=\frac{17}{10}\pi$$

$$q(\alpha)=q\left(\frac{7}{10}\pi\right)=\pi-\frac{7}{10}\pi=\frac{3}{10}\pi$$

따라서

$$3\times\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}=3\times\frac{\frac{17}{10}\pi}{\frac{3}{10}\pi}=17$$

정답 17

21. 출제의도 : 함수의 미분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 중근을 α, 다른 한 근을 β라 하면

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$x<\beta,\ x\neq\alpha$에서 $f(x)<0$

$x\geq\beta$에서 $f(x)\geq 0$

$f(\alpha)=0$이므로

조건 (나)에서

$$g(x)=\begin{cases}-(x-\alpha)^2(x-\beta) & (x\geq\beta)\\ 7(x-\alpha)^2(x-\beta) & (x<\beta)\end{cases}$$

$\lim_{x\to\beta-}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta-}\dfrac{7(x-\alpha)^2(x-\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta-}7(x-\alpha)^2$

$=7(\beta-\alpha)^2$,

$\lim_{x\to\beta+}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta+}\dfrac{-(x-\alpha)^2(x-\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta+}\{-(x-\alpha)^2\}$

$=-(\beta-\alpha)^2$

$\alpha\neq\beta$이므로

$\lim_{x\to\beta-}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}\neq\lim_{x\to\beta+}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}$가 되어 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서만 미분가능하지 않다. ……㉠

$p(x)=(x-1)(x-a)(x-4+a)$라 하면 방정식 $p(x)=0$의 실근은

$x=1$ 또는 $x=a$ 또는 $x=4-a$

$1=a=4-a$가 될 수 없으므로 함수 $|p(x)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1 이상 3 이하이다. ……㉡

조건 (나)에서 함수 $h(x)=g(x)+|p(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 ㉠, ㉡에서 두 함수 $g(x)$, $|p(x)|$는 $x=\beta$에서만 미분가능하지 않아야 한다.

함수 $|p(x)|$가 $x=\beta$에서만 미분가능하지 않아야 하므로

$1=a$ 또는 $a=4-a$ 또는 $4-a=1$

즉, $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$이다.

(i) $a=1$ 또는 $a=3$인 경우

$p(x)=(x-1)^2(x-3)$이고

함수 $|p(x)|$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로

$\beta=3$

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-3)$

조건 (나)에서 함수 $h(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to3-}\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3-}\dfrac{7(x-\alpha)^2(x-3)-(x-1)^2(x-3)}{x-3}$

$=7(3-\alpha)^2-4$

$\lim_{x\to3+}\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3+}\dfrac{-(x-\alpha)^2(x-3)+(x-1)^2(x-3)}{x-3}$

$=-(3-\alpha)^2+4$

$7(3-\alpha)^2-4=-(3-\alpha)^2+4$

$(3-\alpha)^2=1$

$\alpha=2$ 또는 $\alpha=4$

$f(0)=-3\alpha^2$이므로

$f(0)$의 값은 -12 또는 -48

(ii) $a=2$인 경우

$p(x)=(x-2)^2(x-1)$이고

함수 $|p(x)|$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않으므로

$\beta=1$

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-1)$

조건 (나)에서 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1-}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\dfrac{7(x-\alpha)^2(x-1)-(x-2)^2(x-1)}{x-1}$

$=7(1-\alpha)^2-1$

$\lim_{x\to1+}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\dfrac{-(x-\alpha)^2(x-1)+(x-2)^2(x-1)}{x-1}$

$=-(1-\alpha)^2+1$

$7(1-\alpha)^2-1=-(1-\alpha)^2+1$

$(1-\alpha)^2=\frac{1}{4}$

$\alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{3}{2}$

$f(0)=-\alpha^2$ 이므로

$f(0)$의 값은 $-\frac{1}{4}$ 또는 $-\frac{9}{4}$

(i), (ii)에서 $f(0)$의 최댓값은 $-\frac{1}{4}$, 최솟값은 -48이므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$-\frac{1}{4}\times(-48)=12$

정답 12

22. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^2-\frac{7}{2}x+3$,

$g(x)=2x^2-\frac{15}{2}x+\frac{15}{2}$

라 하고, 네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각

$A(r, f(r))$, $B(s, f(s))$, $C(u, g(u))$, $D(v, g(v))$ $(r<s)$

라 하자.

직사각형 ABCD에서 두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로

$\frac{f(s)-f(r)}{s-r}=\frac{g(v)-g(u)}{v-u}$

$\frac{2(s^2-r^2)-\frac{7}{2}(s-r)}{s-r}$

$=\frac{2(v^2-u^2)-\frac{15}{2}(v-u)}{v-u}$

$2(s+r)-\frac{7}{2}=2(v+u)-\frac{15}{2}$

$u+v=r+s+2$ ……㉠

또, 직사각형 ABCD에서 두 선분 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{r+u}{2}=\frac{s+v}{2}$

$u-v=s-r$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$u=s+1$, $v=r+1$

한편, $g(x)=f(x-1)-1$이므로

$g(u)=g(s+1)=f(s)-1$

$g(v)=g(r+1)=f(r)-1$

즉, 두 점 C, D의 좌표는

$C(s+1, f(s)-1)$, $D(r+1, f(r)-1)$

이때 직선 BC의 기울기는

$\frac{(f(s)-1)-f(s)}{(s+1)-s}=-1$

이고 사각형 ABCD가 직사각형이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.

그러므로 두 점 A, B는 상수 k에 대하여 직선 $y=x+k$ 위에 있다고 할 수 있다.

두 점 $A(r, r+k)$, $B(s, s+k)$가 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$a^r=r+k$, $a^s=s+k$ ……㉢

점 $C(s+1, s+k-1)$이

곡선 $y=\log_a\left(x-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$ 위에 있으므로

$s+k-1=\log_a\left(s+1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$

$s+k-\frac{3}{4}=\log_a\left(s+\frac{3}{4}\right)$

$s+\frac{3}{4}=a^{s+k-\frac{3}{4}}=a^s\times a^{k-\frac{3}{4}}$

위의 식에 ㉢을 대입하면

$s+\frac{3}{4}=(s+k)\times a^{k-\frac{3}{4}}$ ……㉣

점 $\mathrm{D}(r+1,\ r+k-1)$에 대하여 마찬가지 방법으로 하면

$r+\frac{3}{4}=(r+k)\times a^{k-\frac{3}{4}}$ ……㉤

㉣에서 ㉤을 빼면

$s-r=(s-r)\times a^{k-\frac{3}{4}}$

$s\neq r$이므로

$a^{k-\frac{3}{4}}=1$

즉, $k=\frac{3}{4}$

그러므로 두 점 A, B는 곡선

$y=2x^2-\frac{7}{2}x+3$과 직선 $y=x+\frac{3}{4}$의

교점이다.

$2x^2-\frac{7}{2}x+3=x+\frac{3}{4}$

$8x^2-18x+9=0$

$(2x-3)(4x-3)=0$

$x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

$r<s$이므로 $r=\frac{3}{4}$, $s=\frac{3}{2}$

즉, 점 A의 좌표가 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{2}\right)$이고 이

점이 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$a^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$

따라서

$a^3=\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^4$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^4$

$=\frac{81}{16}$

에서 $p=16$, $q=81$이므로

$p+q=16+81=97$

정답 97

■ [선택: 확률과 통계]

23. ① 24. ④ 25. ⑤ 26. ② 27. ③
28. ⑤ 29. 190 30. 170

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=5\times4=20$

정답 ①

24. 출제의도 : 조건부확률의 뜻과 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{2}{3}$에서

$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{2}{3}$ … ㉠

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{5}$에서 $1-\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$

㉠에 대입하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}\times\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

정답 ④

25. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r\times(2x^3)^{4-r}\times\left(\frac{1}{x^2}\right)^r$

$={}_4\mathrm{C}_r\times2^{4-r}\times x^{12-5r}$

(단, $r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로

${}_4\mathrm{C}_2\times2^{4-2}=6\times4=24$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 모든 경우의 수는

$6^2=36$

이때 a가 3 이하인 사건을 E, $a\times b$가 8의 배수인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(E\cup F)$이다.

(i) 사건 E가 일어나는 경우는 a는 1, 2, 3 중 하나, b는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나인 경우이므로

$3\times6=18$

그러므로 $\mathrm{P}(E)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

(ⅱ) 사건 F가 일어나는 경우는 순서쌍 (a, b)가
$(2, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$
인 5가지 경우이므로
$$\mathrm{P}(F)=\frac{5}{36}$$

(ⅲ) 사건 $E\cap F$가 일어나는 경우는 순서쌍 (a, b)가 $(2, 4)$인 한 가지 경우뿐이므로
$$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{1}{36}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
$$\mathrm{P}(E\cup F)=\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(F)-\mathrm{P}(E\cap F)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{36}-\frac{1}{36}$$
$$=\frac{11}{18}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 표준정규분포표를 이용하여 정규분포를 따르는 확률변수에 대한 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
정규분포 $\mathrm{N}(1, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $Z=\frac{X-1}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
이때
$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}\sigma\le X\le 2\sigma\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{\frac{3}{2}\sigma-1}{\sigma}\le Z\le\frac{2\sigma-1}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(1.5-\frac{1}{\sigma}\le Z\le 2-\frac{1}{\sigma}\right)=0.044$$
한편, 표준정규분포표에서
$$\mathrm{P}(1.5\le Z\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.4772-0.4332$$
$$=0.044$$
이고,
$$\mathrm{P}(-2\le Z\le -1.5)=\mathrm{P}(1.5\le Z\le 2)$$
이므로
$$2-\frac{1}{\sigma}=2 \text{ 또는 } 2-\frac{1}{\sigma}=-1.5$$
$\frac{1}{\sigma}\neq 0$이므로 $\frac{1}{\sigma}=2+1.5=3.5=\frac{7}{2}$
즉, $\sigma=\frac{2}{7}$
따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1, \left(\frac{2}{7}\right)^2\right)$을 따르므로
$$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{10}{7}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\frac{10}{7}-1}{\frac{2}{7}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.5-0.4332$$
$$=0.0668$$

정답 ③

28. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :
시행을 4번 반복한 후 6장의 카드가 1번째 자리에서부터 차례로 A, A, A, B, B, B가 보이도록 놓여있는 사건을 X, 3번째 시행에서 나온 눈의 수가 6인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

6장의 카드가 1번째 자리에서부터 차례로 A, A, A, B, B, B가 보이도록 놓여 있는 상태를 AAABBB라고 표기하자.

카드가 처음 나열된 상태 AAABBB에서는 한 번의 시행에서 $k=3$일 때만 카드의 나열이 AABABB로 바뀌고 나머지 5가지 경우는 그대로 AAABBB이다.

카드의 나열이 AABABB일 때에는 한 번의 시행에서 $k=2$이면 카드의 나열이 ABAABB로 바뀌고, $k=3$이면 카드의 나열이 다시 AAABBB가 되고, $k=4$이면 카드의 나열이 AABBAB로 바뀌며, 나머지 3가지 경우는 그대로 AABABB이다.

즉, AAABBB에서 시행을 2번 반복한 후 카드의 나열이

AAABBB일 확률은

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{26}{6^2},$$

AABABB일 확률은

$$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{8}{6^2},$$

ABAABB일 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6^2}$,

AABBAB일 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6^2}$

이다.

이때 어떠한 나열에서 특정한 나열로 변할 확률과 그 나열에서 다시 원래의 나열로 돌아올 확률은 항상 같다.

따라서 2번의 시행을 통해 특정한 나열이 될 확률과 그 나열에서 다시 2번의 시행을 통해 원래의 나열로 돌아올 확률이 동일하다.

즉, 이 시행을 4번 반복한 후 카드의 나열이 다시 AAABBB가 되는 확률은 시행을 2번 반복한 후 가능한 나열들의 각 확률들을 제곱하여 더한 것과 같으므로

$$\mathrm{P}(X)=\left(\frac{26}{6^2}\right)^2+\left(\frac{8}{6^2}\right)^2+\left(\frac{1}{6^2}\right)^2+\left(\frac{1}{6^2}\right)^2$$

$$=\frac{26^2+8^2+1^2+1^2}{6^4}=\frac{742}{6^4}$$

이제 이 시행을 4번 반복한 후 카드의 나열이 다시 AAABBB가 되는 경우 중에서 3번째 시행에서 나온 눈의 수가 6인 경우를 생각해 보자.

3번째 시행에서 $k=6$이면 2번째 시행 후의 나열과 3번째 시행 후의 카드의 나열이 바뀌지 않는다. 그러므로 4번째 시행으로 다시 AAABBB가 되려면 2번째 시행 후의 나열이 AAABBB 또는 AABABB이어야 한다.

2번째 시행 후 AAABBB일 확률은 $\frac{26}{6^2}$,

3번째 시행에서 $k=6$일 확률은 $\frac{1}{6}$,

4번째 시행 후 다시 AAABBB가 될 확률은 $\frac{5}{6}$이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{26}{6^2}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{130}{6^4}$$

또한, 2번째 시행 후 AABABB일 확률은 $\frac{8}{6^2}$,

3번째 시행에서 $k=6$일 확률은 $\frac{1}{6}$,

4번째 시행 후 다시 AAABBB가 될 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{8}{6^2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{8}{6^4}$$

그러므로

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{130}{6^4}+\frac{8}{6^4}=\frac{138}{6^4}$$

따라서

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}$$

$$=\frac{\frac{138}{6^4}}{\frac{742}{6^4}}$$

$$=\frac{138}{742}=\frac{69}{371}$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)의 $a+b+c+d=14$를 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하자.

$a'=a-1$, $b'=b-1$, $c'=c-1$, $d'=d-1$ 이라 하면

$a'+b'+c'+d'=10$ (단, a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_3=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$$

즉, $a+b+c+d=14$를 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 286이다.

조건 (가)를 만족시키는 사건을 전체 사건이라 할 때 (나)에서 $10a\geq d$이고 $c<d^2$인 사건의 여사건은 $10a<d$이거나 $c\geq d^2$인 사건이다.

$10a<d$인 사건을 A, $c\geq d^2$인 사건을 B라 하자.

사건 A가 일어나는 경우의 수를 구하자.

$a\geq1$이므로 $10a\geq10$이고, 부등식 $10a<d$를 만족하려면 $d>10$이어야 한다. …… ㉠

a, b, c가 자연수이므로 $a+b+c\geq3$이고, $a+b+c+d=14$에서 d의 최댓값은 11이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $d=11$이고 이때 $a+b+c=3$이 되어 순서쌍 (a, b, c, d)는 $(1, 1, 1, 11)$으로 유일하다.

즉, 사건 A가 일어나는 경우의 수는 1이다.

사건 B가 일어나는 경우의 수를 d의 값에 따라 경우를 나누어 구하자.

(ⅰ) $d=1$일 때 : $c\geq d^2$에서 $c\geq1$

$a+b+c+d=14$, 즉 $a+b+c=13$에서

$a'=a-1$, $b'=b-1$, $c'=c-1$

이라 하면 a', b', c'는 모두 음이 아닌 정수이고 $a'+b'+c'=10$이므로 이를 만족시키는 a', b', c'의 모든 순서쌍 (a', b', c')의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$

(ⅱ) $d=2$일 때 : $c\geq d^2$에서 $c\geq4$

$a+b+c+d=14$, 즉 $a+b+c=12$에서

$a'=a-1$, $b'=b-1$, $c'=c-4$

라 하면 a', b', c'는 모두 음이 아닌 정수이고 $a'+b'+c'=6$이므로 이를 만족시키는 a', b', c'의 모든 순서쌍 (a', b', c')의 개수는

${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

(ⅲ) $d=3$일 때 : $c\geq d^2$에서 $c\geq9$

$a+b+c+d=14$, 즉 $a+b+c=11$에

서

$a'=a-1,\ b'=b-1,\ c'=c-9$

라 하면 a', b', c'는 모두 음이 아닌 정수이고 $a'+b'+c'=0$이므로 이를 만족시키는 a', b', c'의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c')$의 개수는 $(0,\ 0,\ 0)$으로 1

(iv) $d\geq 4$일 때 : $c\geq d^2$에서 $c\geq 16$

$a+b+c+d=14$를 만족시키는 자연수 c는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$66+28+1=95$

사건 A가 일어나는 유일한 경우인 $(1,\ 1,\ 1,\ 11)$은 $c=1,\ d=11$이므로 $c\geq d^2$를 만족시키지 않는다.

즉, $n(A\cap B)=0$이므로

$n(A\cup B)=1+95=96$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$286-96=190$

정답 190

30. 출제의도 : 표본평균의 평균과 분산을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

숫자 0, 1, 2가 각각 하나씩 적혀 있는 세 개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2$$

$$=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}-1^2$$

$$=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

이때 확률변수 $\overline{X}$는 크기가 5인 표본의 표본평균이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=1$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

한편,

$\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 $0\leq k\leq 10$인 정수 k에 대하여 $\frac{k}{5}$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\sum_{k=0}^{10}\left\{\left(\frac{k}{5}\right)^2\times\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{k}{5}\right)\right\}$$

이고,

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\left(\mathrm{E}(\overline{X})\right)^2$$

$$=\frac{2}{15}+1=\frac{17}{15}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\left(k^2\times\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{k}{5}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{10}\left(k^2\times\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{k}{5}\right)\right)$$

$$=25\sum_{k=0}^{10}\left\{\left(\frac{k}{5}\right)^2\times\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{k}{5}\right)\right\}$$

$$=25\times\mathrm{E}(\overline{X}^2)$$

$$=25\times\frac{17}{15}\quad=\frac{85}{3}=a$$

이므로

$$6\times a=6\times\frac{85}{3}=170$$

정답 170