2027학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

# 수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2026. 09. 08.(화)

■ [공통: 수학 Ⅰ·수학 Ⅱ]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01. ④ | 02. ③ | 03. ② | 04. ② | 05. ① |
| 06. ⑤ | 07. ② | 08. ③ | 09. ① | 10. ③ |
| 11. ③ | 12. ④ | 13. ⑤ | 14. ⑤ | 15. ④ |
| 16. 6 | 17. 11 | 18. 38 | 19. 15 | 20. 17 |
| 21. 12 | 22. 97 | | | |

**1. 출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$2^{\frac{3}{2}} \times 4^{-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{-1}$

$= 2^{\frac{3}{2}-1}$

$= 2^{\frac{1}{2}}$

**정답 ④**

**2. 출제의도** : 다항함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x) = 2x^3 - x - 4$에서

$f'(x) = 6x^2 - 1$

따라서

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$

$= 6 \times 2^2 - 1 = 23$

**정답 ③**

**3. 출제의도** : 등차수열의 성질을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하자.

$a_{10} - a_7 = 9$에서 $3d = 9$, $d = 3$

따라서

$a_7 = a_2 + 5d$

$= 2 + 5 \times 3 = 17$

**정답 ②**

**4. 출제의도** : 함수의 연속을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

함수 $f(x)$는 $x = 2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (7x + a) = 14 + a$

$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x^2 + ax) = 4 + 2a$

$f(2) = 14 + a$

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2)$에서

$14 + a = 4 + 2a$

따라서 $a = 10$

**정답 ②**

**5. 출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\int_0^2 (2x^3+6x^2-x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4+2x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 2^4+2\times 2^3-\frac{1}{2}\times 2^2$$

$$=22$$

**정답 ①**

**6. 출제의도** : 삼각함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$a$, $b$가 양수이므로 함수

$f(x)=a\sin\frac{x}{b}+2$의 최댓값은 $a+2$이고,

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{b}}=2b\pi$이다.

$a+2=5$에서 $a=3$

$2b\pi=8\pi$에서 $b=4$

따라서 $a+b=3+4=7$

**정답 ⑤**

**7. 출제의도** : 도함수를 활용하여 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=2x^3+ax^2-4ax$에서

$f'(x)=6x^2+2ax-4a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=6+2a-4a=0$, $a=3$

따라서 $f'(x)=6x^2+6x-12$

$f'(x)=0$에서 $6(x+2)(x-1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$이고

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이므로

극댓값은

$f(-2)$

$=2\times(-2)^3+3\times(-2)^2-12\times(-2)$

$=20$

**정답 ②**

**8. 출제의도** : 등비수열의 일반항을 이용하여 공비를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$ $(r>0)$이라 하면

$a_n=a_1\times r^{n-1}$ $(n\geq 1)$

이고,

$S_3=a_1+a_2+a_3$

이므로

$$\frac{S_3}{a_1+2a_2}=\frac{7}{3}$$

에서

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+2a_2}=\frac{7}{3}$$

$$\frac{a_1+a_1r+a_1r^2}{a_1+2a_1r}=\frac{7}{3}$$

$a_1\neq 0$이므로

$$\frac{1+r+r^2}{1+2r}=\frac{7}{3}$$

$3+3r+3r^2=7+14r$

$3r^2-11r-4=0$

$(3r+1)(r-4)=0$

$r>0$이므로 $r=4$

따라서

$$\frac{a_8}{a_6}=\frac{a_6\times r^2}{a_6}$$

$=r^2$

$=4^2=16$

**정답 ③**

**9. 출제의도** : 미분을 이용하여 두 점의 가속도의 차를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

두 점 P, Q의 시각 $t$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하고 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 하자.

$$v_1(t)=\frac{dx_1}{dt}=12t^2-2t-11$$

$$v_2(t)=\frac{dx_2}{dt}=4t+7$$

두 점의 속도가 같아지는 시각 $t$는

$12t^2-2t-11=4t+7$에서

$6(2t-3)(t+1)=0$

$t\geq 0$이므로

$$t=\frac{3}{2}$$

$$a_1(t)=\frac{dv_1}{dt}=24t-2$$

$$a_2(t)=\frac{dv_2}{dt}=4$$

따라서

$$p=a_1\left(\frac{3}{2}\right)=24\times\frac{3}{2}-2=34$$

$$q=a_2\left(\frac{3}{2}\right)=4$$

이므로

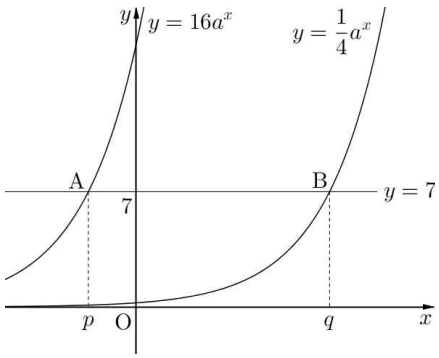
$p-q=34-4=30$

**정답 ①**

**10. 출제의도** : 지수함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$a>1$이므로 두 함수 $y=16a^x$, $y=\frac{1}{4}a^x$의 그래프와 직선 $y=7$을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.




두 점 A, B의 $x$좌표를 각각 $p$, $q$라 하면

$16a^p=7$, $\frac{1}{4}a^q=7$ …… ㉠

$\overline{AB}=4$에서 $q=p+4$ …… ㉡

㉠에서 $16a^p=\frac{1}{4}a^q$이므로 ㉡을 대입하면

$$16a^p=\frac{1}{4}a^{p+4}$$

$64a^p=a^p\times a^4$

$a^p > 0$이므로

$a^4 = 64 = 2^6$에서

$a = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

**정답 ③**

**11. 출제의도** : 적분과 미분의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고, 함숫값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\int_{-1}^{x} f(t)dt = xf(x) - 2x^3 - 3x^2 + 6 \quad \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x = -1$을 대입하면

$0 = -f(-1) + 2 - 3 + 6$

$f(-1) = 5 \quad \cdots$ ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 - 6x$

$xf'(x) = 6x^2 + 6x$

$x \neq 0$일 때 $f'(x) = 6x + 6$이다.

다항함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (6x + 6) = 6$

즉, 모든 실수 $x$에 대하여

$f'(x) = 6x + 6$

$f(x) = \int (6x + 6)dx = 3x^2 + 6x + C$ (단, $C$는 적분상수)

㉡에서 $f(-1) = 5$이므로

$3 - 6 + C = 5, \ C = 8$

따라서 $f(0) = 8$

**정답 ③**

**12. 출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC}\cos(\angle BAC)$

$= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{8}$

$= 36$

이므로 $\overline{BC} = 6$

$\sin^2(\angle BAC) = 1 - \cos^2(\angle BAC)$

$= 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{63}{64}$

이고 $\angle BAC$는 삼각형의 내각이므로

$\sin(\angle BAC) = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2R$에서

$2R = \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{16}{\sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$

두 삼각형 ABC와 CBD의 외접원이 일치하므로 삼각형 CBD의 외접원의 반지름의 길이도 $R$이고 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 2R$에서

$\overline{BD} = 2R\sin(\angle BCD)$

$= \frac{16\sqrt{7}}{7} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = 4\sqrt{2}$

**정답 ④**

13. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는가?

**정답풀이** :

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 6이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=6x(x-t)$라 하면

$$\int_0^2 6x(x-t)dx=\left[2x^3-3tx^2\right]_0^2=16-12t=4$$

에서 $t=1$

즉 $f(x)=6x(x-1)$이다.

ㄱ.

$$\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2|6x(x-1)|dx$$

$$=\int_0^1\{-6x(x-1)\}dx+\int_1^2 6x(x-1)dx$$

$$=\left[-2x^3+3x^2\right]_0^1+\left[2x^3-3x^2\right]_1^2$$

$=1+5=6$ (참)

ㄴ. 일차함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)=0$이므로

0이 아닌 실수 $m$에 대하여

$g(x)=m(x-1)$이라 하면

$$\int_0^2(f(x)+g(x))dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 g(x)dx$$

에서

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2 m(x-1)dx$$

$$=m\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^2=0$$

이고 $\int_0^2 f(x)dx=4$이므로

$$\int_0^2(f(x)+g(x))dx=4$$ (참)

ㄷ. 조건에서 $\int_0^2 f(x)dx=4$이므로

$$\int_0^2(f(x)+h(x))dx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 h(x)dx$$

$$=4+\int_0^2 h(x)dx=4$$

에서

$$\int_0^2 h(x)dx=0$$

함수 $h(x)$가 일차함수이므로

$\int_0^2 h(x)dx=2h(1)=0$에서 $h(1)=0$이다.

따라서 0이 아닌 실수 $a$에 대하여

$h(x)=a(x-1)$이라 하자.

$f(x)+h(x)=6x(x-1)+a(x-1)$

$=(6x+a)(x-1)$

$0\le x\le 2$에서 $\int_0^2|f(x)+h(x)|dx>6$임을 보이자.

$a>0$일 때 $0\le x\le 2$에서

$$|(6x+a)(x-1)|=(6x+a)|x-1|$$
$$=6x|x-1|+a|x-1|$$
$$=|f(x)|+a|x-1|$$

$$\int_0^2|f(x)+h(x)|dx$$

$$=\int_0^2|f(x)|dx+\int_0^2|a(x-1)|dx$$

이고

$$\int_0^2|a(x-1)|dx$$

$$=a\left\{\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx\right\}$$

$$=a\left\{\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2\right\}$$

$=a$

이므로

$$\int_0^2|f(x)+h(x)|dx=6+a>6$$

따라서 조건을 만족시키는 일차함수 $h(x)$가 존재한다. (참)
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**정답** ⑤

**14. 출제의도** : 거듭제곱근의 성질을 활용하여 주어진 식의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 $n$의 개수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=F(n)$이라 하자.

함수 $f(x)$의 정의에 의하여

( i ) $\sqrt[3]{k}$가 자연수, 즉 $k$가 어떤 자연수의 세제곱꼴일 때

$f(\sqrt[3]{k})=\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$이므로

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}}{5\times\frac{1}{k}}=\frac{k^{\frac{2}{3}}}{5}$$

( ii ) $\sqrt[3]{k}$가 자연수가 아닐 때, 즉 $k$가 어떤 자연수의 세제곱꼴이 아닐 때

$f(\sqrt[3]{k})=5$이므로

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=\frac{5}{5\times\frac{1}{k}}=k$$

( i )에서 $k$가 어떤 자연수의 세제곱꼴, 즉 $k=m^3$($m$은 자연수)이면

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=\frac{m^2}{5}$$

( ii )에서 $k$가 어떤 자연수의 세제곱꼴이 아니면 $\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}$의 값은 항상 자연수이다. …… (*)

즉, $F(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 $n$의 값을 구하기 위해서는 $n$이 어떤 자연수의 세제곱꼴이 될 때를 기준으로 경우를 나누어 살펴보아야 한다.

① $n=1(=1^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{1})}{5f(1)}=\frac{1^2}{5}=\frac{1}{5}$이다.

그러므로 (*)에 의하여 $1\le n<8$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $F(n)$의 값은

$\frac{1}{5}$+(자연수)의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

② $n=8(=2^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{8})}{5f(8)}=\frac{2^2}{5}=\frac{4}{5}$이다.

즉, $F(8)$의 값은 $\frac{1}{5}$+(자연수)+$\frac{4}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $8\le n<27$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $F(n)$의 값은 자연수이다.

③ $n=27(=3^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{27})}{5f(27)}=\frac{3^2}{5}=\frac{9}{5}$이다.

즉, $F(27)$의 값은 (자연수)+$\frac{9}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

그러므로 (*)에 의하여 $27\le n<64$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $F(n)$의 값은

(자연수)+$\frac{4}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

④ $n=64(=4^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{64})}{5f(64)}=\frac{4^2}{5}=\frac{16}{5}$이다.

즉, $F(64)$의 값은 (자연수)$+\frac{4}{5}+\frac{16}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $64 \le n < 125$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $F(n)$의 값은 자연수이다.

⑤ $n=125(=5^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{125})}{5f(125)}=\frac{5^2}{5}=5$이다.

즉, $F(125)$의 값은 (자연수)$+5$의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $125 \le n < 216$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $F(n)$의 값은 자연수이다.

⑥ $n=216(=6^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{216})}{5f(216)}=\frac{6^2}{5}=\frac{36}{5}$이다.

즉, $F(216)$의 값은 (자연수)$+\frac{36}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

이때 $7^3=343>300$이므로 (*)에 의하여 $216 \le n \le 300$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $F(n)$의 값은 (자연수)$+\frac{36}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

① ~ ⑥에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 $n$의 값의 범위는

$8 \le n < 27$ 또는 $64 \le n < 216$

이고, 그 개수는

$(27-8)+(216-64)=19+152=171$

**정답 ⑤**

**15. 출제의도** : 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+px+q$(단, $p$, $q$는 상수)

라 하자.

$g(x)=f(x)+f(x-t)$라 하면

$g(x)=x^2+px+q+(x-t)^2+p(x-t)+q$

$\quad=2x^2+2(p-t)x+t^2-pt+2q$

이다.

모든 실수 $a$에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{(2x+1)f(x)}{f(x)+f(x-t)}=\lim_{x\to a}\frac{(2x+1)f(x)}{g(x)}$

의 극한이 존재하기 위해서는 분모의 $g(x)=0$인 실수 $x$가 존재하지 않거나 $g(x)=0$인 실수 $x$에 대하여 분자의 값이 모두 0이 되어야 한다. 이때 방정식 $g(x)=0$이 중근을 가지면 분자도 그 근을 중근으로 가져야 한다.

$x$에 대한 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(p-t)^2-2(t^2-pt+2q)=p^2-4q-t^2$

이고 $D$의 부호에 따라 주어진 극한이 존재하는 $t$의 값의 범위를 구할 수 있다.

( i ) $D<0$인 경우

$g(x)=0$인 실수 $x$가 존재하지 않으므로 모든 실수 $a$에 대하여 주어진 극한이 존재한다.

( ii ) $D>0$인 경우

$g(x)=0$인 실수 $x$의 값은 2개가 존재하고 $t$의 값에 따라 변한다. 하지만 분자의 방정식 $(2x+1)f(x)=0$의 근은 $t$와 관계없는 상수이고 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다. 이때 $t$의 값이 변함에 따라

달라지는 방정식 $g(x)=0$의 근이 고정된 방정식 $(2x+1)f(x)=0$의 근과 일치할 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $D=0$인 경우

$g(x)$는 완전제곱식이고 방정식 $g(x)=0$의 근을 방정식 $(2x+1)f(x)=0$도 중근으로 가져야 한다.

( ⅰ ), ( ⅱ ), (ⅲ)에서 $t \geq \frac{3}{2}$에서 주어진 극한이 존재하기 위해서는 $t=\frac{3}{2}$일 때 $D=0$이고 $t>\frac{3}{2}$일 때 $D \leq 0$이어야 한다.

$p^2-4q-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0$에서

$p^2-4q=\frac{9}{4}$ … ㉠

$t=\frac{3}{2}$일 때 방정식 $g(x)=0$이 중근을 가지고 그 중근은

$x=-\frac{p-\frac{3}{2}}{2}=\frac{3-2p}{4}$

이다.

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식

$p^2-4q=\frac{9}{4}>0$

이므로 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 $(2x+1)f(x)=0$이 중근을 갖기 위해서는 $x=-\frac{1}{2}$이 중근이고 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이어야 한다.

$\frac{3-2p}{4}=-\frac{1}{2}$에서 $p=\frac{5}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$에서

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)p+q=0$

$\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+q=0$

이므로 $q=1$

따라서 $f(x)=x^2+\frac{5}{2}x+1$이므로

$f(2)=2^2+\frac{5}{2}\times 2+1=10$

**정답 ④**

**16. 출제의도** : 로그방정식을 풀 수 있는가?

**정답풀이 :**

$\log_3(x-3)=\log_9(2x-3)$

에서 진수 조건에 의하여

$x-3>0,\ 2x-3>0$

즉, $x>3$

$\log_3(x-3)=\log_9(x-3)^2$

이므로

$\log_9(x-3)^2=\log_9(2x-3)$

에서

$(x-3)^2=2x-3$

$x^2-6x+9=2x-3$

$x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$

$x>3$이므로

$x=6$

**정답 6**

**17. 출제의도** : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f'(x)=6x^2-2x$에서

$f(x)=\int(6x^2-2x)dx$

$=2x^3-x^2+C$ ($C$는 적분상수)

$f(0)=10$에서 $C=10$

따라서 $f(x)=2x^3-x^2+10$이므로

$f(1)=2-1+10=11$

**정답 11**

**18. 출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$a_1=28$로 짝수이므로

$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times28=14$

$a_2=14$로 짝수이므로

$a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\times14=7$

$a_3=7$로 홀수이므로

$a_4=2a_3+12=2\times7+12=26$

$a_4=26$으로 짝수이므로

$a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}\times26=13$

$a_5=13$으로 홀수이므로

$a_6=2a_5+12=2\times13+12=38$

정답 38

**19. 출제의도** : 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=x^3-3x^2-x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-1$

직선과 곡선이 접하는 점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f'(t)=3t^2-6t-1=8$에서

$3t^2-6t-9=0,\ 3(t+1)(t-3)=0$

$t=-1$ 또는 $t=3$

기울기가 8이고 $y$절편이 양수인 직선의 방정식을 $y=8x+a$($a$는 $a>0$인 상수)라 하면

(ⅰ) $t=-1$일 때

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2-(-1)+2=-1$

이므로

$-1=8\times(-1)+a,\ a=7$

(ⅱ) $t=3$일 때

$f(3)=3^3-3\times3^2-3+2=-1$이므로

$-1=8\times3+a,\ a=-25$이고 이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 직선의 방정식은 $y=8x+7$

이 직선이 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=8\times1+7=15$

정답 15

**20. 출제의도** : 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 E라 하자.

곡선 $y=g(x)$가 점 E를 지나고, 두 점 A, D가 점 E에 대하여 대칭이므로

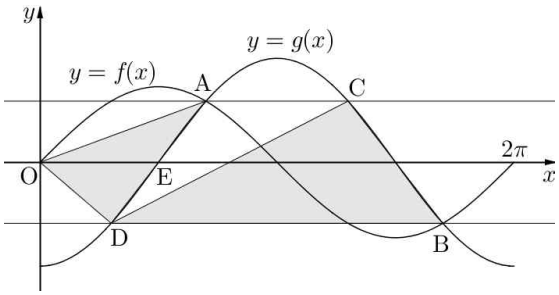
점 A의 $x$좌표를 $a$라 하면

점 D의 $x$좌표는 $\pi-a$이다.

또, 두 점 B, D는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 점 B의 $x$좌표는 $\pi+a$이다.

즉, 두 점 B, D의 좌표는 다음과 같다.

B($\boxed{\pi+a}$, $-\sin a$), D($\boxed{\pi-a}$, $-\sin a$)




삼각형 CDB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DB}}\times 2\sin a=\frac{1}{2}\times 2a\times 2\sin a$$

$$=2a\sin a$$

선분 AD가 $x$축과 만나는 점이 E이므로 삼각형 AOD의 넓이는 삼각형 AOE와 삼각형 ODE의 넓이의 합과 같다.

즉

(삼각형 AOD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OE}}\times\sin a+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OE}}\times\sin a$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\sin a\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\sin a$$

(삼각형 AOD의 넓이)

$$=\frac{5}{14}\times\text{(삼각형 CDB의 넓이)}$$

이므로

$$\frac{\pi}{2}\sin a=\frac{5}{14}\times 2a\sin a$$

에서 $a=\boxed{\frac{7}{10}\pi}$이다.

따라서 $k=-\tan\left(\boxed{\frac{7}{10}\pi}\right)$이다.

이때

$$p(a)=\pi+a,\ q(a)=\pi-a,\ \alpha=\frac{7}{10}\pi$$

이므로

$$p(\alpha)=p\left(\frac{7}{10}\pi\right)=\pi+\frac{7}{10}\pi=\frac{17}{10}\pi$$

$$q(\alpha)=q\left(\frac{7}{10}\pi\right)=\pi-\frac{7}{10}\pi=\frac{3}{10}\pi$$

따라서

$$3\times\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}=3\times\frac{\frac{17}{10}\pi}{\frac{3}{10}\pi}=17$$

**정답** 17

**21. 출제의도** : 함수의 미분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고 함숫값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 중근을 $\alpha$, 다른 한 근을 $\beta$라 하면

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$x<\beta,\ x\neq\alpha$에서 $f(x)<0$

$x\geq\beta$에서 $f(x)\geq 0$

$f(\alpha)=0$이므로

조건 (나)에서

$$g(x)=\begin{cases}-(x-\alpha)^2(x-\beta) & (x\geq\beta)\\ 7(x-\alpha)^2(x-\beta) & (x<\beta)\end{cases}$$

$\lim_{x\to\beta-}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta-}\dfrac{7(x-\alpha)^2(x-\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta-}7(x-\alpha)^2$

$=7(\beta-\alpha)^2$,

$\lim_{x\to\beta+}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta+}\dfrac{-(x-\alpha)^2(x-\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta+}\{-(x-\alpha)^2\}$

$=-(\beta-\alpha)^2$

$\alpha\neq\beta$이므로

$\lim_{x\to\beta-}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}\neq\lim_{x\to\beta+}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}$가 되어 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서만 미분가능하지 않다. ……㉠

$p(x)=(x-1)(x-a)(x-4+a)$라 하면 방정식 $p(x)=0$의 실근은

$x=1$ 또는 $x=a$ 또는 $x=4-a$

$1=a=4-a$가 될 수 없으므로 함수 $|p(x)|$가 미분가능하지 않은 $x$의 개수는 1 이상 3 이하이다. ……㉡

조건 (나)에서 함수 $h(x)=g(x)+|p(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 ㉠, ㉡에서 두 함수 $g(x)$, $|p(x)|$는 $x=\beta$에서만 미분가능하지 않아야 한다.

함수 $|p(x)|$가 $x=\beta$에서만 미분가능하지 않아야 하므로

$1=a$ 또는 $a=4-a$ 또는 $4-a=1$

즉, $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$이다.

( i ) $a=1$ 또는 $a=3$인 경우

$p(x)=(x-1)^2(x-3)$이고

함수 $|p(x)|$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로

$\beta=3$

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-3)$

조건 (나)에서 함수 $h(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to3-}\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3-}\dfrac{7(x-\alpha)^2(x-3)-(x-1)^2(x-3)}{x-3}$

$=7(3-\alpha)^2-4$

$\lim_{x\to3+}\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3+}\dfrac{-(x-\alpha)^2(x-3)+(x-1)^2(x-3)}{x-3}$

$=-(3-\alpha)^2+4$

$7(3-\alpha)^2-4=-(3-\alpha)^2+4$

$(3-\alpha)^2=1$

$\alpha=2$ 또는 $\alpha=4$

$f(0)=-3\alpha^2$이므로

$f(0)$의 값은 $-12$ 또는 $-48$

( ii ) $a=2$인 경우

$p(x)=(x-2)^2(x-1)$이고

함수 $|p(x)|$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않으므로

$\beta=1$

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-1)$

조건 (나)에서 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1-}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\dfrac{7(x-\alpha)^2(x-1)-(x-2)^2(x-1)}{x-1}$

$=7(1-\alpha)^2-1$

$\lim_{x\to1+}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\dfrac{-(x-\alpha)^2(x-1)+(x-2)^2(x-1)}{x-1}$

$=-(1-\alpha)^2+1$

$7(1-\alpha)^2-1=-(1-\alpha)^2+1$

$(1-\alpha)^2=\frac{1}{4}$

$\alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{3}{2}$

$f(0)=-\alpha^2$ 이므로

$f(0)$의 값은 $-\frac{1}{4}$ 또는 $-\frac{9}{4}$

( i ), ( ii )에서 $f(0)$의 최댓값은 $-\frac{1}{4}$, 최솟값은 $-48$이므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$-\frac{1}{4}\times(-48)=12$

**정답 12**

**22. 출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=2x^2-\frac{7}{2}x+3$,

$g(x)=2x^2-\frac{15}{2}x+\frac{15}{2}$

라 하고, 네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각

$A(r, f(r))$, $B(s, f(s))$, $C(u, g(u))$, $D(v, g(v))$ $(r<s)$

라 하자.

직사각형 ABCD에서 두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로

$\frac{f(s)-f(r)}{s-r}=\frac{g(v)-g(u)}{v-u}$

$\frac{2(s^2-r^2)-\frac{7}{2}(s-r)}{s-r}$

$=\frac{2(v^2-u^2)-\frac{15}{2}(v-u)}{v-u}$

$2(s+r)-\frac{7}{2}=2(v+u)-\frac{15}{2}$

$u+v=r+s+2$ ……㉠

또, 직사각형 ABCD에서 두 선분 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{r+u}{2}=\frac{s+v}{2}$

$u-v=s-r$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$u=s+1$, $v=r+1$

한편, $g(x)=f(x-1)-1$이므로

$g(u)=g(s+1)=f(s)-1$

$g(v)=g(r+1)=f(r)-1$

즉, 두 점 C, D의 좌표는

$C(s+1, f(s)-1)$, $D(r+1, f(r)-1)$

이때 직선 BC의 기울기는

$\frac{(f(s)-1)-f(s)}{(s+1)-s}=-1$

이고 사각형 ABCD가 직사각형이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.

그러므로 두 점 A, B는 상수 $k$에 대하여 직선 $y=x+k$ 위에 있다고 할 수 있다.

두 점 $A(r, r+k)$, $B(s, s+k)$가 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$a^r=r+k$, $a^s=s+k$ ……㉢

점 $C(s+1, s+k-1)$이

곡선 $y=\log_a\left(x-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$ 위에 있으므로

$s+k-1=\log_a\left(s+1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$

$s+k-\frac{3}{4}=\log_a\left(s+\frac{3}{4}\right)$

$s+\frac{3}{4}=a^{s+k-\frac{3}{4}}=a^s\times a^{k-\frac{3}{4}}$

위의 식에 ㉢을 대입하면

$s+\frac{3}{4}=(s+k)\times a^{k-\frac{3}{4}}$ ……㉣

점 $\mathrm{D}(r+1,\ r+k-1)$에 대하여 마찬가지 방법으로 하면

$r+\frac{3}{4}=(r+k)\times a^{k-\frac{3}{4}}$ ……㉤

㉣에서 ㉤을 빼면

$s-r=(s-r)\times a^{k-\frac{3}{4}}$

$s\neq r$이므로

$a^{k-\frac{3}{4}}=1$

즉, $k=\frac{3}{4}$

그러므로 두 점 A, B는 곡선

$y=2x^2-\frac{7}{2}x+3$과 직선 $y=x+\frac{3}{4}$의

교점이다.

$2x^2-\frac{7}{2}x+3=x+\frac{3}{4}$

$8x^2-18x+9=0$

$(2x-3)(4x-3)=0$

$x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

$r<s$이므로 $r=\frac{3}{4}$, $s=\frac{3}{2}$

즉, 점 A의 좌표가 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{2}\right)$이고 이

점이 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$a^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$

따라서

$a^3=\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^4$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^4$

$=\frac{81}{16}$

에서 $p=16$, $q=81$이므로

$p+q=16+81=97$

**정답** 97

■ [선택: 기하]
23. ① 24. ② 25. ④ 26. ⑤ 27. ③
28. ② 29. 60 30. 457

**23. 출제의도** : 벡터의 합과 실수배를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
$\vec{a}=(k, 2)$, $\vec{b}=(k, 3)$이므로
$2\vec{a}+\vec{b}=(2k, 4)+(k, 3)$
$=(3k, 7)$
벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합이 10이므로 $3k+7=10$에서
$k=1$

**정답 ①**

**24. 출제의도** : 좌표공간에서 선분을 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
두 점 $A(a, -4, 0)$, $B(6, b, 5)$를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{18+2a}{3+2}, \frac{3b-8}{3+2}, \frac{15+0}{3+2}\right)$
이 점과 점 $(4, -1, 3)$이 일치하므로
$\frac{18+2a}{3+2}=4$에서
$18+2a=20$
$a=1$
$\frac{3b-8}{3+2}=-1$에서
$3b-8=-5$

$b=1$

따라서 $a+b=1+1=2$

**정답 ②**

**25. 출제의도** : 타원의 방정식을 이용하여 두 초점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

단축의 길이가 6이므로 타원과 $y$축이 만나는 두 점의 좌표는

$(0, 3), (0, -3)$

이 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1\,(a>0)$

이라 하면 점 $(4, \sqrt{5})$가 타원 위의 점이므로

$\frac{16}{a^2}+\frac{5}{9}=1$

$a^2=36$

$a>0$이므로 $a=6$

$c^2=a^2-9=27$

$c>0$이므로 $c=3\sqrt{3}$

따라서

$\overline{FF'}=2c=6\sqrt{3}$

**정답 ④**

**26. 출제의도** : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이와 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

점 D에서 선분 AB를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 D′이라 하면

$\overline{DD'}=3$

점 D′은 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이고, 점 C에서 평면 ABD′에 내린 수선의 발이 B이므로

$\overline{BD'}=\overline{CD}=2\sqrt{6}$이다.

$\angle AD'B$는 직각이므로 삼각형 ABD′에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AD'}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$

점 D′에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABD′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{D'H}=\frac{1}{2}\times\overline{AD'}\times\overline{BD'}$

이므로

$\frac{1}{2}\times6\times\overline{D'H}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{6}$

즉 $\overline{D'H}=2\sqrt{2}$

삼각형 DD′H에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DH}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}$

$\overline{DD'}\perp$(평면 ABD′), $\overline{D'H}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DH}\perp\overline{AB}$이고 삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DH}=\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{17}=3\sqrt{17}$

**정답 ⑤**

**27. 출제의도** : 포물선의 정의와 접선을 이용하여 미지수를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

포물선 $y^2=4px$의 초점을 F라 하면 $F(p, 0)$이고 포물선의 준선은 $x=-p$이다.

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AF}=\overline{AH}=3p$이므로 점 A의 $x$좌표는 $2p$이다. 점 A의 $y$좌표를 $y_1$이라 하면

$y_1{}^2=4p\times 2p=8p^2$

이고 $y_1>0$이므로 $y_1=2\sqrt{2}p$

즉, $A(2p, 2\sqrt{2}p)$

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 A에서의 접선 $l$의 방정식은

$2\sqrt{2}p\times y=2p(x+2p)$

즉, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}p$

이고 직선 $l$이 $y$축과 만나는 점 B의 좌표는 $(0, \sqrt{2}p)$이다.

직선 $l$과 수직이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$y-2\sqrt{2}p=-\sqrt{2}(x-2p)$

즉, $y=-\sqrt{2}x+4\sqrt{2}p$

이고 이 직선이 $y$축과 만나는 점 C의 좌표는 $(0, 4\sqrt{2}p)$이다.

$\overline{BC}=4\sqrt{2}p-\sqrt{2}p=3\sqrt{2}p$

이고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 길이는 $2p$이므로 삼각형 ACB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}p\times 2p=3\sqrt{2}p^2=16\sqrt{2}$

$p^2=\frac{16}{3}$이고 $p>0$이므로

$p=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**정답 ③**

**28. 출제의도** : 공간좌표을 이용하여 주어진 삼각형의 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

조건 (나)에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

구 $S$와 평면 ABC가 만나는 도형이 삼각형 ABC의 외접원이므로 삼각형의 외심을 M, 반지름의 길이를 $r$이라 하면

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=3$이고 직선 OM은 평면 ABC와 수직이다.

$\overline{OM}=h$라 하고 좌표공간에서 점 O를 원점, 점 M의 좌표를 $(0, 0, h)$, 점 A의 좌표를 $(r, 0, h)$라 하면

$B\left(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r, h\right)$, $C\left(-\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}r, h\right)$

$\overline{OA}=3$이므로

$r^2+h^2=9$

$h^2=9-r^2$ ……㉠

$\overline{BD}=\overline{CD}$이므로 점 D의 $y$좌표는 0이고 조건 (가)에서 직선 OD가 평면 $z=h$와 서로 평행하므로 점 D의 $z$좌표도 0이다.

그러므로 $D(3, 0, 0)$ 또는 $D(-3, 0, 0)$

( i ) $D(3, 0, 0)$인 경우

$\overline{BC}=\sqrt{3}r$에서

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2=3r^2$

즉, $\left(3+\frac{r}{2}\right)^2+\frac{3}{4}r^2+h^2=3r^2$

이 식에 ㉠을 대입하면

$\left(3+\frac{r}{2}\right)^2+\frac{3}{4}r^2+(9-r^2)=3r^2$

$(r-3)(r+2)=0$

$r>0$이므로 $r=3$

㉠에서 $h=0$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) D$(-3, 0, 0)$인 경우

$\overline{BC}=\sqrt{3}r$에서

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2=3r^2$

즉, $\left(-3+\frac{r}{2}\right)^2+\frac{3}{4}r^2+h^2=3r^2$

이 식에 ㉠을 대입하면

$\left(-3+\frac{r}{2}\right)^2+\frac{3}{4}r^2+(9-r^2)=3r^2$

$(r-2)(r+3)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

㉠에서 $h=\sqrt{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

A$(2, 0, \sqrt{5})$, B$(-1, \sqrt{3}, \sqrt{5})$,

C$(-1, -\sqrt{3}, \sqrt{5})$, D$(-3, 0, 0)$

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+3}=2\sqrt{3}$이고 점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{6}=3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{BH}$이므로

$\overline{BH}=2\sqrt{2}$

$\angle BHC=\theta$라 하면 $\theta$는 두 평면 OAB와 OAC의 이면각이다.

삼각형 BCH에서 코사인법칙을 이용하여

$\cos\theta=\frac{8+8-12}{2\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$

따라서 삼각형 OAB의 평면 OAC 위로의 정사영의 넓이는

$3\sqrt{2}\times\cos\theta=3\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

**정답 ②**

**29. 출제의도** : 쌍곡선과 타원의 정의와 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

두 초점 F, F′이 $y$축에 대하여 대칭이고 점 P$(0, p)$가 $y$축 위의 점이므로 두 점 A, B는 $y$축에 대하여 대칭이다.

그러므로

$\overline{BF}=\overline{AF'}$, $\overline{BP}=\overline{AP}$, $\overline{PF}=\overline{PF'}$

두 초점이 A, B인 타원이 두 점 F, P를 지나므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AP}+\overline{BP}$

즉, $\overline{AF}+\overline{AF'}=2\overline{AP}$ ……㉠

점 A는 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{AF'}-\overline{AF}=8$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{AP}=\overline{AF}+4$

점 A는 선분 PF 위의 점이므로

$\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{AF}=2\overline{AF}+4$ ……㉢

직선 PC와 직선 FF′는 서로 평행이므로

$\angle CPF=\angle PFF'$ ……㉣

$\overline{PF}=\overline{PF'}$이므로

$\angle PF'F=\angle PFF'$ ……㉤

조건에서 $\angle APF'=\angle APC$이고 ㉣, ㉤에서 삼각형 PFF′은 정삼각형이다.

$\overline{PF}=\overline{FF'}=2c$, $\angle AFF'=\angle PFF'=60^\circ$

㉢에서 $2c=2\overline{AF}+4$이므로

$\overline{AF}=c-2$

㉡에서

$\overline{AF'}=c+6$

삼각형 AFF′에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AF'}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FF'}^2 - 2\times\overline{AF}\times\overline{FF'}\times\cos 60^\circ$

$(c+6)^2 = (c-2)^2 + (2c)^2 - 2\times(c-2)\times 2c\times\frac{1}{2}$

$(c-8)(c+2)=0$

$c>0$이므로 $c=8$

그러므로

$\overline{AF}=6,\ \overline{AF'}=14,\ \overline{FF'}=16,\ \overline{AP}=10$

삼각형 APC와 삼각형 AFF′는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{AP}:\overline{AF}=10:6=5:3$

그러므로

$\overline{PC}=\frac{5}{3}\times\overline{FF'}=\frac{5}{3}\times 16=\frac{80}{3}$

$\overline{CA}=\frac{5}{3}\times\overline{AF'}=\frac{5}{3}\times 14=\frac{70}{3}$

따라서 삼각형 ACP의 둘레의 길이는

$\overline{AP}+\overline{PC}+\overline{CA}=10+\frac{80}{3}+\frac{70}{3}=60$

**정답 60**

**30. 출제의도** : 평면벡터의 성분과 내적을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

**정답풀이** :

조건 (가)에서

$\angle ABC=\angle BAD<\frac{\pi}{2}$이므로 두 직선 AD와 BC는 평행이 아니고,

$\overline{AD}=\overline{BC}$이므로 사다리꼴 ABCD는 $\overline{AB}//\overline{CD}$인 등변사다리꼴이다.

좌표평면 위에 선분 AB의 중점이 원점, 선분 AB가 $x$축 위에 있도록 사다리꼴 ABCD를 그리면 $A(-12,0)$, $B(12,0)$이고 이 사다리꼴은 $y$축에 대하여 대칭이므로 $C(c,h)$, $D(-c,h)$(단, $c>0$, $h>0$)로 놓을 수 있다.

$\overline{AD}=13\sqrt{2}$에서

$\{-c-(-12)\}^2+(h-0)^2=(13\sqrt{2})^2$

$(12-c)^2+h^2=338$ … ㉠

$\overrightarrow{AB}=(24,0)$, $\overrightarrow{DC}=(2c,0)$에서

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=24\times 2c=48c$

$\overrightarrow{AD}=(12-c,h)$, $\overrightarrow{BC}=(c-12,h)$에서

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(12-c)(c-12)+h^2=-(12-c)^2+h^2$

조건 (나)에서

$48c=-(12-c)^2+h^2$ … ㉡

㉠에서 $h^2=338-(12-c)^2$을 ㉡에 대입하면

$48c=-(12-c)^2+\{338-(12-c)^2\}$

$48c=338-2(12-c)^2$

정리하면 $c^2=25$이고 $c>0$이므로 $c=5$

이를 ㉠에 대입하면

$(12-5)^2+h^2=338$

에서 $h^2=289$이고 $h>0$이므로 $h=17$

$\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XD}=0$에서 점 X는 선분 AD를 지름으로 하는 원 위에 있고,

$\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XC}=0$에서 점 X는 선분 BC를 지름으로 하는 원 위에 있다.

두 선분 AD, BC의 중점을 각각 $O_1$, $O_2$라 하면

$O_1\left(-\frac{17}{2},\frac{17}{2}\right)$, $O_2\left(\frac{17}{2},\frac{17}{2}\right)$

이고 $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=\frac{13\sqrt{2}}{2}$이므로 점 X는 두 점 $O_1$과 $O_2$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$인 두 원의 교점이다. 두 원의 중심은 $y$축에 대하여 대칭이고 반지름의 길이가 같으므로 두 원의 교점 X는 $y$축 위에 존재한다. 점

X의 좌표를 $(0, k)$라 하면

$$\left(\frac{17}{2}-0\right)^2+\left(\frac{17}{2}-k\right)^2=\left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

에서

$$\left(k-\frac{17}{2}\right)^2=\frac{338}{4}-\frac{289}{4}=\frac{49}{4}=\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

이므로

$$k=\frac{17}{2}-\frac{7}{2}=5 \text{ 또는 } k=\frac{17}{2}+\frac{7}{2}=12$$

즉 점 X의 좌표는

$(0, 5)$ 또는 $(0, 12)$

이고 이 두 점을 각각 $X_1$, $X_2$라 하면

$\overrightarrow{AD}=(7, 17)$, $\overrightarrow{AX_1}=(12, 5)$,

$\overrightarrow{AX_2}=(12, 12)$이므로

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX_1}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX_2}$$

$$=\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AX_1}+\overrightarrow{AX_2}\right)$$

$$=(7, 17)\cdot(24, 17)$$

$$=7\times24+17\times17$$

$$=457$$

**정답 457**