2027학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2026. 09. 08.(화)

■ [공통: 수학 Ⅰ·수학 Ⅱ]

01. ④	02. ③	03. ②	04. ②	05. ①
06. ⑤	07. ②	08. ③	09. ①	10. ③
11. ③	12. ④	13. ⑤	14. ⑤	15. ④
16. 6	17. 11	18. 38	19. 15	20. 17
21. 12	22. 97			

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2^{\frac{3}{2}} \times 4^{-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{-1}$

$= 2^{\frac{3}{2}-1}$

$= 2^{\frac{1}{2}}$

정답 ④

2. 출제의도 : 다항함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 2x^3 - x - 4$에서

$f'(x) = 6x^2 - 1$

따라서

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$

$= 6 \times 2^2 - 1 = 23$

정답 ③

3. 출제의도 : 등차수열의 성질을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_{10} - a_7 = 9$에서 $3d = 9$, $d = 3$

따라서

$a_7 = a_2 + 5d$

$= 2 + 5 \times 3 = 17$

정답 ②

4. 출제의도 : 함수의 연속을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x = 2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (7x + a) = 14 + a$

$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x^2 + ax) = 4 + 2a$

$f(2) = 14 + a$

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2)$에서

$14 + a = 4 + 2a$

따라서 $a = 10$

정답 ②

5. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^2 (2x^3+6x^2-x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4+2x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 2^4+2\times 2^3-\frac{1}{2}\times 2^2$$

$$=22$$

정답 ①

6. 출제의도 : 삼각함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

a, b가 양수이므로 함수

$f(x)=a\sin\frac{x}{b}+2$의 최댓값은 $a+2$이고,

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{b}}=2b\pi$이다.

$a+2=5$에서 $a=3$

$2b\pi=8\pi$에서 $b=4$

따라서 $a+b=3+4=7$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 도함수를 활용하여 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+ax^2-4ax$에서

$f'(x)=6x^2+2ax-4a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=6+2a-4a=0$, $a=3$

따라서 $f'(x)=6x^2+6x-12$

$f'(x)=0$에서 $6(x+2)(x-1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$이고

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이므로

극댓값은

$f(-2)$

$=2\times(-2)^3+3\times(-2)^2-12\times(-2)$

$=20$

정답 ②

8. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 공비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_n=a_1\times r^{n-1}$ $(n\geq 1)$

이고,

$S_3=a_1+a_2+a_3$

이므로

$$\frac{S_3}{a_1+2a_2}=\frac{7}{3}$$

에서

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+2a_2}=\frac{7}{3}$$

$$\frac{a_1+a_1r+a_1r^2}{a_1+2a_1r}=\frac{7}{3}$$

$a_1\neq 0$이므로

$$\frac{1+r+r^2}{1+2r}=\frac{7}{3}$$

$3+3r+3r^2=7+14r$

$3r^2-11r-4=0$

$(3r+1)(r-4)=0$

$r>0$이므로 $r=4$

따라서

$$\frac{a_8}{a_6}=\frac{a_6\times r^2}{a_6}$$

$=r^2$

$=4^2=16$

정답 ③

9. 출제의도 : 미분을 이용하여 두 점의 가속도의 차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하고 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 하자.

$$v_1(t)=\frac{dx_1}{dt}=12t^2-2t-11$$

$$v_2(t)=\frac{dx_2}{dt}=4t+7$$

두 점의 속도가 같아지는 시각 t는

$12t^2-2t-11=4t+7$에서

$6(2t-3)(t+1)=0$

$t\geq 0$이므로

$$t=\frac{3}{2}$$

$$a_1(t)=\frac{dv_1}{dt}=24t-2$$

$$a_2(t)=\frac{dv_2}{dt}=4$$

따라서

$$p=a_1\left(\frac{3}{2}\right)=24\times\frac{3}{2}-2=34$$

$$q=a_2\left(\frac{3}{2}\right)=4$$

이므로

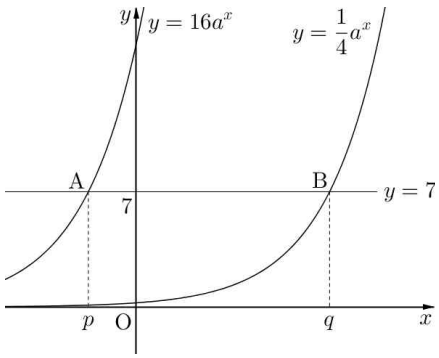
$p-q=34-4=30$

정답 ①

10. 출제의도 : 지수함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a>1$이므로 두 함수 $y=16a^x$, $y=\frac{1}{4}a^x$의 그래프와 직선 $y=7$을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



두 점 A, B의 x좌표를 각각 p, q라 하면

$16a^p=7$, $\frac{1}{4}a^q=7$ …… ㉠

$\overline{AB}=4$에서 $q=p+4$ …… ㉡

㉠에서 $16a^p=\frac{1}{4}a^q$이므로 ㉡을 대입하면

$$16a^p=\frac{1}{4}a^{p+4}$$

$64a^p=a^p\times a^4$

$a^p > 0$이므로

$a^4 = 64 = 2^6$에서

$a = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

정답 ③

11. 출제의도 : 적분과 미분의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고, 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_{-1}^{x} f(t)dt = xf(x) - 2x^3 - 3x^2 + 6 \quad \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x = -1$을 대입하면

$0 = -f(-1) + 2 - 3 + 6$

$f(-1) = 5 \quad \cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 - 6x$

$xf'(x) = 6x^2 + 6x$

$x \neq 0$일 때 $f'(x) = 6x + 6$이다.

다항함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (6x + 6) = 6$

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(x) = 6x + 6$

$f(x) = \int (6x + 6)dx = 3x^2 + 6x + C$ (단, C는 적분상수)

㉡에서 $f(-1) = 5$이므로

$3 - 6 + C = 5, \ C = 8$

따라서 $f(0) = 8$

정답 ③

12. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC}\cos(\angle BAC)$

$= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{8}$

$= 36$

이므로 $\overline{BC} = 6$

$\sin^2(\angle BAC) = 1 - \cos^2(\angle BAC)$

$= 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{63}{64}$

이고 $\angle BAC$는 삼각형의 내각이므로

$\sin(\angle BAC) = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2R$에서

$2R = \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{16}{\sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$

두 삼각형 ABC와 CBD의 외접원이 일치하므로 삼각형 CBD의 외접원의 반지름의 길이도 R이고 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 2R$에서

$\overline{BD} = 2R\sin(\angle BCD)$

$= \frac{16\sqrt{7}}{7} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = 4\sqrt{2}$

정답 ④

13. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 6이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=6x(x-t)$라 하면

$$\int_0^2 6x(x-t)dx=\left[2x^3-3tx^2\right]_0^2=16-12t=4$$

에서 $t=1$

즉 $f(x)=6x(x-1)$이다.

ㄱ.

$$\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2|6x(x-1)|dx$$

$$=\int_0^1\{-6x(x-1)\}dx+\int_1^2 6x(x-1)dx$$

$$=\left[-2x^3+3x^2\right]_0^1+\left[2x^3-3x^2\right]_1^2$$

$=1+5=6$ (참)

ㄴ. 일차함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)=0$이므로

0이 아닌 실수 m에 대하여

$g(x)=m(x-1)$이라 하면

$$\int_0^2(f(x)+g(x))dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 g(x)dx$$

에서

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2 m(x-1)dx$$

$$=m\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^2=0$$

이고 $\int_0^2 f(x)dx=4$이므로

$$\int_0^2(f(x)+g(x))dx=4$$ (참)

ㄷ. 조건에서 $\int_0^2 f(x)dx=4$이므로

$$\int_0^2(f(x)+h(x))dx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 h(x)dx$$

$$=4+\int_0^2 h(x)dx=4$$

에서

$$\int_0^2 h(x)dx=0$$

함수 $h(x)$가 일차함수이므로

$\int_0^2 h(x)dx=2h(1)=0$에서 $h(1)=0$이다.

따라서 0이 아닌 실수 a에 대하여

$h(x)=a(x-1)$이라 하자.

$f(x)+h(x)=6x(x-1)+a(x-1)$

$=(6x+a)(x-1)$

$0\le x\le 2$에서 $\int_0^2|f(x)+h(x)|dx>6$임을 보이자.

$a>0$일 때 $0\le x\le 2$에서

$$|(6x+a)(x-1)|=(6x+a)|x-1|$$
$$=6x|x-1|+a|x-1|$$
$$=|f(x)|+a|x-1|$$

$$\int_0^2|f(x)+h(x)|dx$$

$$=\int_0^2|f(x)|dx+\int_0^2|a(x-1)|dx$$

이고

$$\int_0^2|a(x-1)|dx$$

$$=a\left\{\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx\right\}$$

$$=a\left\{\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2\right\}$$

$=a$

이므로

$$\int_0^2|f(x)+h(x)|dx=6+a>6$$

따라서 조건을 만족시키는 일차함수 $h(x)$가 존재한다. (참)
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

14. 출제의도 : 거듭제곱근의 성질을 활용하여 주어진 식의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=F(n)$이라 하자.

함수 $f(x)$의 정의에 의하여

(i) $\sqrt[3]{k}$가 자연수, 즉 k가 어떤 자연수의 세제곱꼴일 때

$f(\sqrt[3]{k})=\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$이므로

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}}{5\times\frac{1}{k}}=\frac{k^{\frac{2}{3}}}{5}$$

(ii) $\sqrt[3]{k}$가 자연수가 아닐 때, 즉 k가 어떤 자연수의 세제곱꼴이 아닐 때

$f(\sqrt[3]{k})=5$이므로

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=\frac{5}{5\times\frac{1}{k}}=k$$

(i)에서 k가 어떤 자연수의 세제곱꼴, 즉 $k=m^3$(m은 자연수)이면

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}=\frac{m^2}{5}$$

(ii)에서 k가 어떤 자연수의 세제곱꼴이 아니면 $\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}$의 값은 항상 자연수이다. …… (*)

즉, $F(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하기 위해서는 n이 어떤 자연수의 세제곱꼴이 될 때를 기준으로 경우를 나누어 살펴보아야 한다.

① $n=1(=1^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{1})}{5f(1)}=\frac{1^2}{5}=\frac{1}{5}$이다.

그러므로 (*)에 의하여 $1\le n<8$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은

$\frac{1}{5}$+(자연수)의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

② $n=8(=2^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{8})}{5f(8)}=\frac{2^2}{5}=\frac{4}{5}$이다.

즉, $F(8)$의 값은 $\frac{1}{5}$+(자연수)+$\frac{4}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $8\le n<27$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은 자연수이다.

③ $n=27(=3^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{27})}{5f(27)}=\frac{3^2}{5}=\frac{9}{5}$이다.

즉, $F(27)$의 값은 (자연수)+$\frac{9}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

그러므로 (*)에 의하여 $27\le n<64$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은

(자연수)+$\frac{4}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

④ $n=64(=4^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{64})}{5f(64)}=\frac{4^2}{5}=\frac{16}{5}$이다.

즉, $F(64)$의 값은 (자연수)$+\frac{4}{5}+\frac{16}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $64 \le n < 125$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은 자연수이다.

⑤ $n=125(=5^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{125})}{5f(125)}=\frac{5^2}{5}=5$이다.

즉, $F(125)$의 값은 (자연수)$+5$의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $125 \le n < 216$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은 자연수이다.

⑥ $n=216(=6^3)$일 때

$\frac{f(\sqrt[3]{216})}{5f(216)}=\frac{6^2}{5}=\frac{36}{5}$이다.

즉, $F(216)$의 값은 (자연수)$+\frac{36}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

이때 $7^3=343>300$이므로 (*)에 의하여 $216 \le n \le 300$인 모든 자연수 n에 대하여 $F(n)$의 값은 (자연수)$+\frac{36}{5}$의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

① ~ ⑥에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 n의 값의 범위는

$8 \le n < 27$ 또는 $64 \le n < 216$

이고, 그 개수는

$(27-8)+(216-64)=19+152=171$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+px+q$(단, p, q는 상수)

라 하자.

$g(x)=f(x)+f(x-t)$라 하면

$g(x)=x^2+px+q+(x-t)^2+p(x-t)+q$

$\quad=2x^2+2(p-t)x+t^2-pt+2q$

이다.

모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{(2x+1)f(x)}{f(x)+f(x-t)}=\lim_{x\to a}\frac{(2x+1)f(x)}{g(x)}$

의 극한이 존재하기 위해서는 분모의 $g(x)=0$인 실수 x가 존재하지 않거나 $g(x)=0$인 실수 x에 대하여 분자의 값이 모두 0이 되어야 한다. 이때 방정식 $g(x)=0$이 중근을 가지면 분자도 그 근을 중근으로 가져야 한다.

x에 대한 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(p-t)^2-2(t^2-pt+2q)=p^2-4q-t^2$

이고 D의 부호에 따라 주어진 극한이 존재하는 t의 값의 범위를 구할 수 있다.

(i) $D<0$인 경우

$g(x)=0$인 실수 x가 존재하지 않으므로 모든 실수 a에 대하여 주어진 극한이 존재한다.

(ii) $D>0$인 경우

$g(x)=0$인 실수 x의 값은 2개가 존재하고 t의 값에 따라 변한다. 하지만 분자의 방정식 $(2x+1)f(x)=0$의 근은 t와 관계없는 상수이고 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다. 이때 t의 값이 변함에 따라

달라지는 방정식 $g(x)=0$의 근이 고정된 방정식 $(2x+1)f(x)=0$의 근과 일치할 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $D=0$인 경우

$g(x)$는 완전제곱식이고 방정식 $g(x)=0$의 근을 방정식 $(2x+1)f(x)=0$도 중근으로 가져야 한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $t \geq \frac{3}{2}$에서 주어진 극한이 존재하기 위해서는 $t=\frac{3}{2}$일 때 $D=0$이고 $t>\frac{3}{2}$일 때 $D \leq 0$이어야 한다.

$p^2-4q-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0$에서

$p^2-4q=\frac{9}{4}$ … ㉠

$t=\frac{3}{2}$일 때 방정식 $g(x)=0$이 중근을 가지고 그 중근은

$x=-\frac{p-\frac{3}{2}}{2}=\frac{3-2p}{4}$

이다.

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식

$p^2-4q=\frac{9}{4}>0$

이므로 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 $(2x+1)f(x)=0$이 중근을 갖기 위해서는 $x=-\frac{1}{2}$이 중근이고 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이어야 한다.

$\frac{3-2p}{4}=-\frac{1}{2}$에서 $p=\frac{5}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$에서

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)p+q=0$

$\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+q=0$

이므로 $q=1$

따라서 $f(x)=x^2+\frac{5}{2}x+1$이므로

$f(2)=2^2+\frac{5}{2}\times 2+1=10$

정답 ④

16. 출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_3(x-3)=\log_9(2x-3)$

에서 진수 조건에 의하여

$x-3>0,\ 2x-3>0$

즉, $x>3$

$\log_3(x-3)=\log_9(x-3)^2$

이므로

$\log_9(x-3)^2=\log_9(2x-3)$

에서

$(x-3)^2=2x-3$

$x^2-6x+9=2x-3$

$x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$

$x>3$이므로

$x=6$

정답 6

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=6x^2-2x$에서

$f(x)=\int(6x^2-2x)dx$

$=2x^3-x^2+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=10$에서 $C=10$

따라서 $f(x)=2x^3-x^2+10$이므로

$f(1)=2-1+10=11$

정답 11

18. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=28$로 짝수이므로

$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times28=14$

$a_2=14$로 짝수이므로

$a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\times14=7$

$a_3=7$로 홀수이므로

$a_4=2a_3+12=2\times7+12=26$

$a_4=26$으로 짝수이므로

$a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}\times26=13$

$a_5=13$으로 홀수이므로

$a_6=2a_5+12=2\times13+12=38$

정답 38

19. 출제의도 : 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2-x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-1$

직선과 곡선이 접하는 점의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=3t^2-6t-1=8$에서

$3t^2-6t-9=0,\ 3(t+1)(t-3)=0$

$t=-1$ 또는 $t=3$

기울기가 8이고 y절편이 양수인 직선의 방정식을 $y=8x+a$(a는 $a>0$인 상수)라 하면

(ⅰ) $t=-1$일 때

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2-(-1)+2=-1$

이므로

$-1=8\times(-1)+a,\ a=7$

(ⅱ) $t=3$일 때

$f(3)=3^3-3\times3^2-3+2=-1$이므로

$-1=8\times3+a,\ a=-25$이고 이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 직선의 방정식은 $y=8x+7$

이 직선이 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=8\times1+7=15$

정답 15

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 E라 하자.

곡선 $y=g(x)$가 점 E를 지나고, 두 점 A, D가 점 E에 대하여 대칭이므로

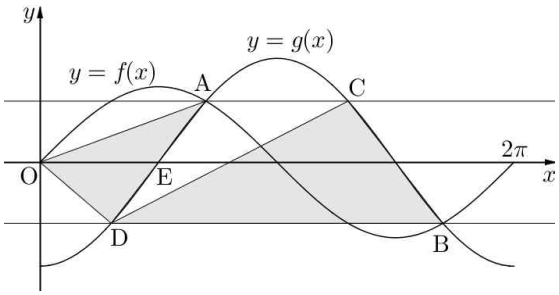
점 A의 x좌표를 a라 하면

점 D의 x좌표는 $\pi-a$이다.

또, 두 점 B, D는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 점 B의 x좌표는 $\pi+a$이다.

즉, 두 점 B, D의 좌표는 다음과 같다.

B($\boxed{\pi+a}$, $-\sin a$), D($\boxed{\pi-a}$, $-\sin a$)



삼각형 CDB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DB}}\times 2\sin a=\frac{1}{2}\times 2a\times 2\sin a$$

$$=2a\sin a$$

선분 AD가 x축과 만나는 점이 E이므로 삼각형 AOD의 넓이는 삼각형 AOE와 삼각형 ODE의 넓이의 합과 같다.

즉

(삼각형 AOD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OE}}\times\sin a+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OE}}\times\sin a$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\sin a\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\sin a$$

(삼각형 AOD의 넓이)

$$=\frac{5}{14}\times\text{(삼각형 CDB의 넓이)}$$

이므로

$$\frac{\pi}{2}\sin a=\frac{5}{14}\times 2a\sin a$$

에서 $a=\boxed{\frac{7}{10}\pi}$이다.

따라서 $k=-\tan\left(\boxed{\frac{7}{10}\pi}\right)$이다.

이때

$$p(a)=\pi+a,\ q(a)=\pi-a,\ \alpha=\frac{7}{10}\pi$$

이므로

$$p(\alpha)=p\left(\frac{7}{10}\pi\right)=\pi+\frac{7}{10}\pi=\frac{17}{10}\pi$$

$$q(\alpha)=q\left(\frac{7}{10}\pi\right)=\pi-\frac{7}{10}\pi=\frac{3}{10}\pi$$

따라서

$$3\times\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}=3\times\frac{\frac{17}{10}\pi}{\frac{3}{10}\pi}=17$$

정답 17

21. 출제의도 : 함수의 미분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 중근을 α, 다른 한 근을 β라 하면

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$x<\beta,\ x\neq\alpha$에서 $f(x)<0$

$x\geq\beta$에서 $f(x)\geq 0$

$f(\alpha)=0$이므로

조건 (나)에서

$$g(x)=\begin{cases}-(x-\alpha)^2(x-\beta) & (x\geq\beta)\\ 7(x-\alpha)^2(x-\beta) & (x<\beta)\end{cases}$$

$\lim_{x\to\beta-}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta-}\dfrac{7(x-\alpha)^2(x-\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta-}7(x-\alpha)^2$

$=7(\beta-\alpha)^2$,

$\lim_{x\to\beta+}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta+}\dfrac{-(x-\alpha)^2(x-\beta)}{x-\beta}$

$=\lim_{x\to\beta+}\{-(x-\alpha)^2\}$

$=-(\beta-\alpha)^2$

$\alpha\neq\beta$이므로

$\lim_{x\to\beta-}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}\neq\lim_{x\to\beta+}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}$가 되어 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서만 미분가능하지 않다. ……㉠

$p(x)=(x-1)(x-a)(x-4+a)$라 하면 방정식 $p(x)=0$의 실근은

$x=1$ 또는 $x=a$ 또는 $x=4-a$

$1=a=4-a$가 될 수 없으므로 함수 $|p(x)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1 이상 3 이하이다. ……㉡

조건 (나)에서 함수 $h(x)=g(x)+|p(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 ㉠, ㉡에서 두 함수 $g(x)$, $|p(x)|$는 $x=\beta$에서만 미분가능하지 않아야 한다.

함수 $|p(x)|$가 $x=\beta$에서만 미분가능하지 않아야 하므로

$1=a$ 또는 $a=4-a$ 또는 $4-a=1$

즉, $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$이다.

(i) $a=1$ 또는 $a=3$인 경우

$p(x)=(x-1)^2(x-3)$이고

함수 $|p(x)|$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로

$\beta=3$

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-3)$

조건 (나)에서 함수 $h(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to3-}\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3-}\dfrac{7(x-\alpha)^2(x-3)-(x-1)^2(x-3)}{x-3}$

$=7(3-\alpha)^2-4$

$\lim_{x\to3+}\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3+}\dfrac{-(x-\alpha)^2(x-3)+(x-1)^2(x-3)}{x-3}$

$=-(3-\alpha)^2+4$

$7(3-\alpha)^2-4=-(3-\alpha)^2+4$

$(3-\alpha)^2=1$

$\alpha=2$ 또는 $\alpha=4$

$f(0)=-3\alpha^2$이므로

$f(0)$의 값은 -12 또는 -48

(ii) $a=2$인 경우

$p(x)=(x-2)^2(x-1)$이고

함수 $|p(x)|$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않으므로

$\beta=1$

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-1)$

조건 (나)에서 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1-}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\dfrac{7(x-\alpha)^2(x-1)-(x-2)^2(x-1)}{x-1}$

$=7(1-\alpha)^2-1$

$\lim_{x\to1+}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\dfrac{-(x-\alpha)^2(x-1)+(x-2)^2(x-1)}{x-1}$

$=-(1-\alpha)^2+1$

$7(1-\alpha)^2-1=-(1-\alpha)^2+1$

$(1-\alpha)^2=\frac{1}{4}$

$\alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{3}{2}$

$f(0)=-\alpha^2$ 이므로

$f(0)$의 값은 $-\frac{1}{4}$ 또는 $-\frac{9}{4}$

(i), (ii)에서 $f(0)$의 최댓값은 $-\frac{1}{4}$, 최솟값은 -48이므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$-\frac{1}{4}\times(-48)=12$

정답 12

22. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^2-\frac{7}{2}x+3$,

$g(x)=2x^2-\frac{15}{2}x+\frac{15}{2}$

라 하고, 네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각

$A(r, f(r))$, $B(s, f(s))$, $C(u, g(u))$, $D(v, g(v))$ $(r<s)$

라 하자.

직사각형 ABCD에서 두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로

$\frac{f(s)-f(r)}{s-r}=\frac{g(v)-g(u)}{v-u}$

$\frac{2(s^2-r^2)-\frac{7}{2}(s-r)}{s-r}$

$=\frac{2(v^2-u^2)-\frac{15}{2}(v-u)}{v-u}$

$2(s+r)-\frac{7}{2}=2(v+u)-\frac{15}{2}$

$u+v=r+s+2$ ……㉠

또, 직사각형 ABCD에서 두 선분 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{r+u}{2}=\frac{s+v}{2}$

$u-v=s-r$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$u=s+1$, $v=r+1$

한편, $g(x)=f(x-1)-1$이므로

$g(u)=g(s+1)=f(s)-1$

$g(v)=g(r+1)=f(r)-1$

즉, 두 점 C, D의 좌표는

$C(s+1, f(s)-1)$, $D(r+1, f(r)-1)$

이때 직선 BC의 기울기는

$\frac{(f(s)-1)-f(s)}{(s+1)-s}=-1$

이고 사각형 ABCD가 직사각형이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.

그러므로 두 점 A, B는 상수 k에 대하여 직선 $y=x+k$ 위에 있다고 할 수 있다.

두 점 $A(r, r+k)$, $B(s, s+k)$가 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$a^r=r+k$, $a^s=s+k$ ……㉢

점 $C(s+1, s+k-1)$이

곡선 $y=\log_a\left(x-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$ 위에 있으므로

$s+k-1=\log_a\left(s+1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$

$s+k-\frac{3}{4}=\log_a\left(s+\frac{3}{4}\right)$

$s+\frac{3}{4}=a^{s+k-\frac{3}{4}}=a^s\times a^{k-\frac{3}{4}}$

위의 식에 ㉢을 대입하면

$s+\frac{3}{4}=(s+k)\times a^{k-\frac{3}{4}}$ ……㉣

점 $\mathrm{D}(r+1,\ r+k-1)$에 대하여 마찬가지 방법으로 하면

$r+\frac{3}{4}=(r+k)\times a^{k-\frac{3}{4}}$ ……㉤

㉣에서 ㉤을 빼면

$s-r=(s-r)\times a^{k-\frac{3}{4}}$

$s\neq r$이므로

$a^{k-\frac{3}{4}}=1$

즉, $k=\frac{3}{4}$

그러므로 두 점 A, B는 곡선

$y=2x^2-\frac{7}{2}x+3$과 직선 $y=x+\frac{3}{4}$의

교점이다.

$2x^2-\frac{7}{2}x+3=x+\frac{3}{4}$

$8x^2-18x+9=0$

$(2x-3)(4x-3)=0$

$x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

$r<s$이므로 $r=\frac{3}{4}$, $s=\frac{3}{2}$

즉, 점 A의 좌표가 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{2}\right)$이고 이

점이 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$a^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$

따라서

$a^3=\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^4$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^4$

$=\frac{81}{16}$

에서 $p=16$, $q=81$이므로

$p+q=16+81=97$

정답 97

■ [선택: 미적분]

23. ④ 24. ① 25. ③ 26. ② 27. ⑤

28. ④ 29. 81 30. 49

23. 출제의도 : 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(2x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

정답 ④

24. 출제의도 : 부분적분법을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

부분적분법에 의하여

$$\int_0^1(3x+1)e^x dx$$

$$=\left[(3x+1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 3e^x dx$$

$$=(4e-1)-\left[3e^x\right]_0^1$$

$$=(4e-1)-(3e-3)$$

$$=e+2$$

정답 ①

25. 출제의도 : 등비수열의 수렴 조건을 이용하여 공비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{k^2-20}{16}$인 등비수열이므로 수열 $\{a_n\}$이 수렴하기 위해서는

$-1<\frac{k^2-20}{16}\le 1$이어야 한다.

$-1<\frac{k^2-20}{16}\le 1$에서

$-16<k^2-20\le 16,\ 4<k^2\le 36$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 k의 값은 ± 3, ± 4, ± 5, ± 6이고, 그 개수는 8이다.

정답 ③

26. 출제의도 : 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\frac{2}{x^2+x}$에서 몫의 미분법에 의하여

$$y'=\frac{-2(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

곡선 $y=\frac{2}{x^2+x}(x>0)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선 l의 기울기는

$\frac{-2\times 3}{4}=-\frac{3}{2}$

그러므로 직선 l의 방정식은

$$y=-\frac{3}{2}(x-1)+1$$

즉, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

따라서 곡선 $y=\frac{2}{x^2+x}(x>0)$과

직선 l 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^2\left|\frac{2}{x^2+x}-\left(-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)\right|dx$$

$$=\int_1^2\left\{\frac{2}{x(x+1)}-\left(-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right)dx$$

$$=\left[2\ln x-2\ln(x+1)+\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x\right]_1^2$$

$$=(2\ln 2-2\ln 3+3-5)-\left(-2\ln 2+\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right)$$

$$=2(2\ln 2-\ln 3)-\frac{1}{4}$$

$$=2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{4}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(\ln x)^3-3\ln x$에서 $f(1)=0$이므로

$h(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$h'(1)=g'(f(1))f'(1)$

$=g'(0)\times f'(1)$ …… ㉠

한편 $f(x)=0$에서

$\ln x\{(\ln x)^2-3\}=0$

$\ln x=0$ 또는 $\ln x=\sqrt{3}$ 또는 $\ln x=-\sqrt{3}$

$x=1$ 또는 $x=e^{\sqrt{3}}$ 또는 $x=e^{-\sqrt{3}}$

$t\geq e$인 모든 실수 t에 대하여

$g(f(t))=t^2$

$t\geq e$일 때 $f(t)\geq -2$이므로

$t>e$에서 위 등식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(f(t))f'(t)=2t$ …… ㉡

$f'(x)=3(\ln x)^2\times\frac{1}{x}-\frac{3}{x}$

$=\frac{3}{x}\{(\ln x)^2-1\}$

이고,

$f(t)=0$에서 $t>e$이므로 $t=e^{\sqrt{3}}$

$f'(e^{\sqrt{3}})=\frac{3}{e^{\sqrt{3}}}\times(\sqrt{3}^2-1)=\frac{6}{e^{\sqrt{3}}}$

㉡의 양변에 $t=e^{\sqrt{3}}$을 대입하면

$g'(0)\times\frac{6}{e^{\sqrt{3}}}=2e^{\sqrt{3}}$

$g'(0)=\frac{1}{3}e^{2\sqrt{3}}$

이때 $f'(1)=-3$이므로 ㉠에서

$h'(1)=\frac{1}{3}e^{2\sqrt{3}}\times(-3)=-e^{2\sqrt{3}}$

정답 ⑤

[참고]

$f(x)=(\ln x)^3-3\ln x$에서

$f'(x)=\frac{3}{x}\{(\ln x)^2-1\}$

$f'(x)=0$에서

$\ln x=-1$ 또는 $\ln x=1$

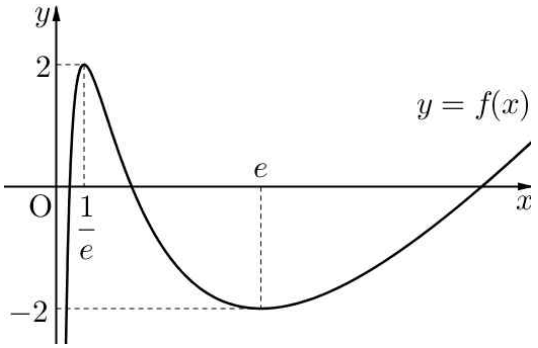
$x=\frac{1}{e}$ 또는 $x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	$\frac{1}{e}$	…	e	…
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

$f\left(\frac{1}{e}\right)=2$, $f(e)=-2$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



즉, $x \geq e$일 때 $f(x) \geq -2$이다.

28. 출제의도 : 사인법칙, 삼각함수의 덧셈정리, 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

t는 삼각형 OAP의 넓이에서 부채꼴 OBP의 넓이를 뺀 값이다.

$\angle AOP=\theta$라 하면

$\overline{OB}=\overline{OP}=2$, $\overline{OA}=5$이고

삼각형 OAP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 5\times \sin\theta$

부채꼴 OBP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2^2\times \theta$

이므로

$t=5\sin\theta-2\theta$ …… ㉠

또 $\angle OAP+\angle AOP=\angle OPQ$에서

$\angle OAP=f(t)-\theta$

삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여

$\frac{5}{\sin(\pi-f(t))}=\frac{2}{\sin(f(t)-\theta)}$

$\sin(f(t)-\theta)=\frac{2}{5}\sin f(t)$ …… ㉡

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$1=(5\cos\theta-2)\frac{d\theta}{dt}$ …… ㉢

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\cos(f(t)-\theta)\left(f'(t)-\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{2}{5}\cos f(t)\times f'(t)$ …… ㉣

한편 $\tan f(k)=\frac{3}{2}$에서

$\frac{\sin f(k)}{\cos f(k)}=\frac{3}{2}$, $\sin f(k)=\frac{3}{2}\cos f(k)$

$\sin^2 f(k)+\cos^2 f(k)=\frac{13}{4}\cos^2 f(k)=1$

$\cos^2 f(k)=\frac{4}{13}$

$0<f(t)<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos f(k)=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin f(k)=\frac{3}{\sqrt{13}}$

이를 ㉡에 대입하면

$\sin(f(k)-\theta)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{6}{5\sqrt{13}}$ 이고

$\cos(f(k)-\theta)=\sqrt{1-\left(\frac{6}{5\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{17}{5\sqrt{13}}$

㉣의 양변에 $t=k$를 대입하면

$\cos(f(k)-\theta)\left(f'(k)-\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{2}{5}\cos f(k)\times f'(k)$

$\frac{17}{5\sqrt{13}}\times\left(f'(k)-\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{\sqrt{13}}\times f'(k)$

$17\times\left(f'(k)-\frac{d\theta}{dt}\right)=4f'(k)$ …… ㉤

㉢에서 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{5\cos\theta-2}$이고

$\sin\theta=\sin(f(k)-(f(k)-\theta))$

$=\sin f(k)\cos(f(k)-\theta)-\cos f(k)\sin(f(k)-\theta)$

에서

$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{17}{5\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{6}{5\sqrt{13}} = \frac{3}{5}$

$\overline{AP} < \overline{AQ}$에서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\theta = \frac{4}{5}$이고 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5\cos\theta - 2} = \frac{1}{2}$

이 값을 ㉡에 대입하면

$17 \times \left(f'(k) - \frac{1}{2} \right) = 4f'(k)$

$17f'(k) - \frac{17}{2} = 4f'(k)$

$f'(k) = \frac{17}{26}$

정답 ④

29. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하고 등비급수의 합을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_1 > 0$, $a_2 = a_1 r < 0$에서

$r < 0$ …… ㉠

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로

$\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

$r \le -1$이면

$a_{2n} = a_1 r^{2n-1}$에서 $r^{2n-1} \le -1$이므로

$a_{2n} = -a_1 |r|^{2n-1} \le -a_1 < 0$

$|a_{2n}| \ge 10$일 때,

$b_{2n} = a_{2n} - a_1 \le -2a_1 < 0$

$|a_{2n}| < 10$일 때, $b_{2n} = a_{2n}^2 \ge a_1^2 > 0$

이는 수열 $\{b_n\}$이 0에 수렴한다는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 ㉠에 의하여 $-1 < r < 0$

조건 (가)에서 $(b_2)^2 = 36b_3 \ge 0$이므로

$b_3 \ge 0$

$|a_3| \ge 10$이면

$b_3 = a_3 - a_1 = a_1 r^2 - a_1 = a_1(r^2 - 1)$

이때 $-1 < r < 0$이므로 $b_3 < 0$이 되어

$b_3 \ge 0$을 만족시키지 않는다.

그러므로 $|a_3| < 10$이고 $b_3 = (a_3)^2$

$|a_2| < 10$이면 $b_2 = (a_2)^2$, $b_3 = (a_3)^2$

조건 (가)에서

$(a_2)^4 = 36 \times (a_3)^2$

$(a_1 r)^4 = 36 \times (a_1 r^2)^2$, $a_1^2 = 36$

$a_1 > 0$이므로 $a_1 = 6$

$|a_1| < 10$이고 $-1 < r < 0$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| < 10$

그러므로 $b_n = (a_n)^2$이고

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{36}{1 - r^2} > 36$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉 $|a_2| \ge 10$이고 $|a_1| \ge 10$

따라서 $|a_1| \ge 10$, $|a_2| \ge 10$, $|a_3| < 10$이므로

$b_1 = a_1 - a_1 = 0$

$b_2 = a_2 - a_1 = a_1(r - 1)$

$b_3 = (a_3)^2 = a_1^2 r^4$

조건 (가)에서 $\{a_1(r-1)\}^2 = 36 \times a_1^2 r^4$

$(r-1)^2 = 36r^4$

$-1 < r < 0$이므로

$r - 1 = -6r^2$,

$6r^2 + r - 1 = 0$, $(3r - 1)(2r + 1) = 0$

$-1 < r < 0$이므로 $r = -\frac{1}{2}$

$|a_3|<10$이고 $r=-\frac{1}{2}$이므로

$n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여

$|a_n|<10$이고 $b_n=(a_n)^2$

즉 수열 $\{b_n\}$은 셋째항부터 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열을 이룬다.

$b_3=(a_3)^2=a_1^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{a_1^2}{16}$이므로

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$$=b_1+b_2+\sum_{n=3}^{\infty}b_n$$

$$=0+\left(-\frac{a_1}{2}-a_1\right)+\frac{\frac{a_1^2}{16}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=-\frac{3a_1}{2}+\frac{a_1^2}{12}=12$$

$a_1^2-18a_1-144=0,\ (a_1+6)(a_1-24)=0$

에서

$|a_1|\geq 10$이므로 $a_1=24$

따라서

$36\times a_4\times a_6$

$=36\times\left\{24\times\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}\times\left(24\times\left(-\frac{1}{32}\right)\right\}=81$

정답 81

30. 출제의도 : 치환적분법과 정적분의 성질 및 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2^{2x+\frac{1}{2}\cos\pi x}$에서

$$f'(x)=2^{2x+\frac{1}{2}\cos\pi x}\times\ln 2\times\left(2-\frac{\pi}{2}\sin\pi x\right)$$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$$\frac{1}{4}\int_{f(1)}^{f(3)}g(x)dx+\int_{f(0)}^{f(2)}\frac{2^{4g(x)}g'(x)}{x}dx$$

…… ㉠

$x=f(t)$로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=f'(t)$

함수 $f(x)$는 일대일대응이므로

$f(1)=f(t)$에서 $t=1$

$f(3)=f(t)$에서 $t=3$

$$\frac{1}{4}\int_{f(1)}^{f(3)}g(x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^3 g(f(t))f'(t)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^3 tf'(t)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left[tf(t)\right]_1^3-\int_1^3 f(t)dt\right)$$

$$=\frac{1}{4}(3f(3)-f(1))-\frac{1}{4}\int_1^3 f(t)dt$$

…… ㉡

또,

$f(0)=f(t)$에서 $t=0$

$f(2)=f(t)$에서 $t=2$

이고

$x=f(t)$이면

$g(x)=t,\ g'(x)\frac{dx}{dt}=1$이므로

$$\int_{f(0)}^{f(2)}\frac{2^{4g(x)}g'(x)}{x}dx$$

$$=\int_0^2\frac{2^{4t}}{f(t)}dt$$

$$=\int_0^2\frac{2^{4t}}{2^{2t+\frac{1}{2}\cos\pi t}}dt$$

$$= \int_0^2 2^{2t-\frac{1}{2}\cos\pi t} dt$$

$$= \int_1^3 2^{2(t-1)-\frac{1}{2}\cos\pi(t-1)} dt$$

$$= \int_1^3 2^{-2+2t+\frac{1}{2}\cos\pi t} dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 2^{2t+\frac{1}{2}\cos\pi t} dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 f(t)dt$$

…… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{4}\int_{f(1)}^{f(3)} g(x)dx + \int_{f(0)}^{f(2)} \frac{2^{4g(x)}g'(x)}{x} dx$$

$$= \frac{1}{4}(3f(3)-f(1)) - \frac{1}{4}\int_1^3 f(t)dt$$

$$+ \frac{1}{4}\int_1^3 f(t)dt$$

$$= \frac{1}{4}(3f(3)-f(1))$$

$$= \frac{1}{4}\left(3\times 2^{\frac{11}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(3\times 2^5 - 2)$$

$$= \frac{47}{2}\sqrt{2}$$

따라서 $p=2$, $q=47$이므로

$p+q=49$

정답 49