수학 영역

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정답

1	③	2	②	3	①	4	⑤	5	④
6	③	7	②	8	④	9	⑤	10	①
11	③	12	①	13	②	14	④	15	①
16	7	17	38	18	12	19	24	20	213
21	320	22	26						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$5^{-\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}} \times (5^2)^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 5$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x) = 2x + 3$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = 9$

3. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 계산하기

$\sum_{k=1}^{5} (k + 3a_k) = \sum_{k=1}^{5} k + 3\sum_{k=1}^{5} a_k$

$= \frac{5 \times 6}{2} + 3\sum_{k=1}^{5} a_k = 27$

$3\sum_{k=1}^{5} a_k = 27 - 15 = 12$

따라서 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 4$

4. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 1$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (2x + a) = 2 + a$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x^2 - ax + 11) = 12 - a$

$f(1) = 12 - a$

$2 + a = 12 - a$, $2a = 10$

따라서 $a = 5$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$g'(x) = (2x + 2)f(x) + (x^2 + 2x)f'(x)$

$g'(1) = 4f(1) + 3f'(1) = 4 \times 2 + 3 \times 1 = 11$

6. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_{\sqrt{a}} b = 6$에서 $b = (\sqrt{a})^6 = a^3$

$\log_4 a + \log_2 b = \log_4 a + \log_4 b^2$

$= \log_4 ab^2$

$= \log_4 a(a^3)^2$

$= \log_4 a^7$

$= 7\log_4 a = 14$

$\log_4 a = 2$, $a = 4^2 = 16$, $b = 16^3$

$\log_2 \frac{b}{a} = \log_2 \frac{16^3}{16} = \log_2 16^2 = \log_2 2^8 = 8$

7. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^{-2} f(x)\,dx$

$= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_{-2}^0 f(x)\,dx$

$= \int_{-2}^2 f(x)\,dx = \frac{40}{3}$

$\int_{-2}^2 (x^3 + x^2 + a)\,dx = 2\int_0^2 (x^2 + a)\,dx$

$= 2\left[\frac{1}{3}x^3 + ax\right]_0^2$

$= \frac{16}{3} + 4a$

$\frac{16}{3} + 4a = \frac{40}{3}$, $4a = 8$

따라서 $a = 2$

8. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ 이므로

$2\cos\theta + \sin\theta = 0$

$2\cos\theta = -\sin\theta$ … ㉠

$4\cos^2\theta = \sin^2\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로

$4\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

$\sin\theta < 0$ 이므로

㉠에 의하여 $\cos\theta > 0$

따라서 $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

9. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$f'(x) = 6x^2 - 14x$

함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$ $(t > 0)$에서의 접선의 방정식은

$y = f'(t)(x - t) + f(t)$

$y = (6t^2 - 14t)(x - t) + 2t^3 - 7t^2 + 1$

접선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1 = (6t^2 - 14t)(0 - t) + 2t^3 - 7t^2 + 1$

$1 = -4t^3 + 7t^2 + 1$

$4t^3 - 7t^2 = t^2(4t - 7) = 0$

따라서 $t = \frac{7}{4}$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

함수 $y = \cos\frac{\pi x}{a}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = 2a$

$0 \le x \le 2a$에서 $\cos\frac{\pi x}{a} = \frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{a} = \frac{5\pi}{3}$ 이므로

$x = \frac{a}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}a$

점 A의 좌표는 $\left(\frac{a}{3}, \frac{1}{2}\right)$

점 B의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}a, \frac{1}{2}\right)$

$0 \le x \le 2a$에서 $\cos\frac{\pi x}{a} = -\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{a} = \frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{a} = \frac{4\pi}{3}$ 이므로

$x = \frac{2}{3}a$ 또는 $x = \frac{4}{3}a$

점 C의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}a, -\frac{1}{2}\right)$

점 D의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}a, -\frac{1}{2}\right)$

$\overline{AB} = \frac{4}{3}a$, $\overline{CD} = \frac{2}{3}a$

사각형 ACDB는 사다리꼴이므로

사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}a + \frac{2}{3}a\right) \times 1 = a = \frac{3}{2}$

$\overline{AB} = \frac{4}{3}a = 2$

따라서 $a \times \overline{AB} = \frac{3}{2} \times 2 = 3$

11. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 문제 해결하기

시각이 $t\,(t \ge 0)$일 때 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 $x(0) = 0$

ㄱ. $k = 0$이면, $v(t) = 3t^2 - 6t$

$x(1) = x(0) + \int_0^1 v(t)\,dt$

$= \int_0^1 (3t^2 - 6t)\,dt$

$= \left[t^3 - 3t^2\right]_0^1 = -2$ (참)

ㄴ. $k = 2$이면, $v(t) = 3t^2 - 6t + 2$

시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리와 점 P의 위치의 변화량이 같아지려면 $0 \le t \le 3$인 모든 t에 대하여 $v(t) \ge 0$이어야 한다.

$v(1) = -1$이므로

시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리는 점 P의 위치의 변화량과 같지 않다. (거짓)

ㄷ. $k = -9$이면, $v(t) = 3t^2 - 6t - 9$

$3t^2 - 6t - 9 = 3(t + 1)(t - 3)$이므로

시각 $t = 0$에서 $t = 4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4 |v(t)|\,dt$

$= \int_0^3 (-3t^2 + 6t + 9)\,dt + \int_3^4 (3t^2 - 6t - 9)\,dt$

$= \left[-t^3 + 3t^2 + 9t\right]_0^3 + \left[t^3 - 3t^2 - 9t\right]_3^4$

$= 27 + 7 = 34$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

12. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 $a\,(a>0)$,
공비를 $r\,(r>0)$ 이라 하자.
$a_n = ar^{n-1}$ (단, n 은 자연수)
$a_5 \times (a_6 + a_7) = 20\,a_{10}$ 이므로

$ar^4 \times (ar^5 + ar^6) = 20ar^9$
양변을 ar^9 으로 나누면
$a(1+r) = 20$
$a = \dfrac{20}{1+r}$ … ㉠
$r = 1$ 인 경우 $a = 10$, $S_4 = 40$
그러므로 $S_4 = 65$ 를 만족시키지 않는다.
공비 r 은 1이 아닌 양수이므로
$S_4 = \dfrac{a(r^4-1)}{r-1}$
$= \dfrac{20}{1+r} \times \dfrac{r^4-1}{r-1}$
$= \dfrac{20(r^2+1)(r^2-1)}{r^2-1}$
$= 20(r^2+1)$
$= 65$
$r^2 + 1 = \dfrac{65}{20} = \dfrac{13}{4}$, $r^2 = \dfrac{9}{4}$
$r > 0$ 이므로 $r = \dfrac{3}{2}$
㉠에 의하여 $a = 8$
따라서 $a_2 = ar = 8 \times \dfrac{3}{2} = 12$

13. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1)$
이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축이 만나는
점의 좌표는 $(-2, 0)$
$g(x) = 4x + 2$ 라 하면
$f(x) = g(x)$ 에서
$x^3 + 2x^2 + x + 2 = 4x + 2$
$x(x-1)(x+3) = 0$
$x = -3$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 이므로
점 P 의 좌표는 $(1, 6)$, 점 Q 의 좌표는 $(0, 2)$
$g(x) = 0$ 에서
$4x + 2 = 0$
$x = -\dfrac{1}{2}$ 이므로 점 R 의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$

$A = \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \{f(x) - g(x)\}\,dx$

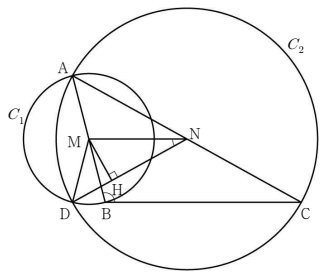
$B = \displaystyle\int_{0}^{1} \{g(x) - f(x)\}\,dx$

$A - B$
$= \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \{f(x) - g(x)\}dx - \int_{0}^{1} \{g(x) - f(x)\}dx$
$= \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \{f(x) - g(x)\}\,dx + \int_{0}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx$
$= \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx$
$= \displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{1} g(x)\,dx$
$= \displaystyle\int_{-2}^{1} (x^3 + 2x^2 + x + 2)\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (4x + 2)\,dx$
$= \left[\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} - \left[2x^2 + 2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$
$= \dfrac{9}{4}$

따라서 $A - B = \dfrac{9}{4}$

[참고]
점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면
$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} g(x)\,dx$ 의 값은
삼각형 RHP 의 넓이와 같다.
$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} g(x)\,dx = \frac{1}{2} \times \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \times 6 = \frac{9}{2}$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기



$\angle CBA = \theta$ 라 하자.
삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta} = \dfrac{8}{\sin\theta} = 2 \times \dfrac{16\sqrt{15}}{15}$
$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\cos\theta = -\dfrac{1}{4}$

$\overline{BC} = a\,(a>0)$ 이라 하자.
삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\theta = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}}$
$-\dfrac{1}{4} = \dfrac{16 + a^2 - 64}{2 \times 4 \times a}$
$a^2 + 2a - 48 = 0$, $(a-6)(a+8) = 0$
$a = 6$
두 점 M, N 은 각각 선분 AB 와 선분 AC 의
중점이므로 $\overline{MN} = \dfrac{1}{2} \times \overline{BC} = 3$
점 D 는 원 C_1 위의 점이므로 $\overline{MD} = 2$
점 D 는 원 C_2 위의 점이므로 $\overline{DN} = 4$
$\angle MND = \alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 라 하자.
삼각형 MDN 에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\alpha = \dfrac{\overline{MN}^2 + \overline{DN}^2 - \overline{MD}^2}{2 \times \overline{MN} \times \overline{DN}}$
$= \dfrac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \dfrac{7}{8}$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{7}{8}\right)^2 = \dfrac{15}{64}$
$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$
따라서 직각삼각형 MHN 에서
$\overline{MH} = \overline{MN} \times \sin\alpha = 3 \times \dfrac{\sqrt{15}}{8} = \dfrac{3\sqrt{15}}{8}$

[다른 풀이]
$\overline{AB} = 2\overline{AM}$, $\overline{AC} = 2\overline{AN}$,
$\angle MAN$ 은 공통이므로
두 삼각형 ABC 와 AMN 은 서로 닮음이고
닮음비는 2 : 1, 넓이의 비는 4 : 1 이다.
$\overline{AM} = \overline{DM}$, $\overline{AN} = \overline{DN}$ 이고
선분 MN 은 공통이므로
두 삼각형 AMN 과 DMN 은 서로 합동이다.
삼각형 ABC 의 넓이는
$\dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin\theta = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \dfrac{\sqrt{15}}{4}$
$= 3\sqrt{15}$
삼각형 DMN 의 넓이는
$\dfrac{1}{4} \times 3\sqrt{15} = \dfrac{1}{2} \times \overline{DN} \times \overline{MH}$
$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times \overline{MH}$
따라서 $\overline{MH} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3\sqrt{15}}{4} = \dfrac{3\sqrt{15}}{8}$

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$p(x) = f(x) - g(x)$ 라 하자.
$h(x) = f(x) + |p(x)|$
함수 $h(x)$ 는 $p(x) \neq 0$ 인 모든 실수 x 에서
미분가능하다.
조건 (가)에 의하여 $p(-1) = 0$, $p'(-1) \neq 0$
$p(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}ax^2 + b$
$p(-1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}a + b = 0$, $b = \dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{2}$
$p'(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 - ax$
$p'(-1) = -\dfrac{3}{2} + a \neq 0$, $a \neq \dfrac{3}{2}$
$p(x) = -\dfrac{1}{2}(x+1)\{x^2 + (a-1)x - (a-1)\}$ 에서
$a \neq \dfrac{3}{2}$ 이므로
x 에 대한 방정식 $x^2 + (a-1)x - (a-1) = 0$ 은
-1 을 근으로 갖지 않는다.
x 에 대한 방정식 $x^2 + (a-1)x - (a-1) = 0$ 의
판별식을 D 라 하면
$D = (a-1)^2 + 4(a-1) = (a-1)(a+3)$
$D > 0$ 이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $D \leq 0$, $-3 \leq a \leq 1$ … ㉡

$$h(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3+a-1 & (x\le -1)\\ \frac{2}{3}x^3+ax^2 & (x>-1)\end{cases}$$

$$h'(x)=\begin{cases}-x^2 & (x<-1)\\ 2x^2+2ax & (x>-1)\end{cases}$$

조건 (나)에 의하여
함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이므로
$a<0$ … ㉡
함수 $h(x)$는 $x=-1$, $x=-a$에서 극소이므로
$\alpha=-1$, $\beta=-a$

$h(\alpha)=h(-1)=\frac{1}{3}+a-1=a-\frac{2}{3}$

$h(\beta)=h(-a)=\frac{1}{3}a^3$

$h(\alpha)\ge h(\beta)$, $a-\frac{2}{3}\ge\frac{1}{3}a^3$

$(a-1)^2(a+2)\le 0$
$a=1$ 또는 $a\le -2$ … ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $-3\le a\le -2$

$b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$이므로

$a+b=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}$

$M=\frac{3}{2}\times(-2)-\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$

$m=\frac{3}{2}\times(-3)-\frac{1}{2}=-5$

따라서 $M-m=-\frac{7}{2}-(-5)=\frac{3}{2}$

16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1=2$

$a_2=\frac{a_1}{1}+4=6$

$a_3=\frac{a_2}{2}+4=7$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$F(x)=\int f(x)\,dx$
$=\int(3x^2+4)\,dx$
$=x^3+4x+C$ (단, C는 적분상수)
$F(0)+F(2)=C+(16+C)=14$
$C=-1$
$F(x)=x^3+4x-1$
따라서 $F(3)=27+12-1=38$

18. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

로그의 진수는 양수이므로
$x+4>0$, $x-2>0$
$x>2$ … ㉠
$\log_3(x+4)\le 3+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

$\log_3(x+4)-\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\le 3$

$\log_3(x+4)+\log_3(x-2)\le 3$
$\log_3(x+4)(x-2)\le \log_3 27$
로그의 밑이 1보다 크므로
$(x+4)(x-2)\le 27$
$x^2+2x-35\le 0$
$(x-5)(x+7)\le 0$
$-7\le x\le 5$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2<x\le 5$이므로
정수 x의 값은 3, 4, 5
따라서 구하는 모든 정수 x의 값의 합은 12

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	2	…	3
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	k	↘	$k-16$	↗	$k-9$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 k를 갖고,
$x=2$에서 극소이면서 최솟값 $k-16$을 갖는다.
$f(0)=k=40$이므로
$k=40$
따라서 닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=k-16=24$

20. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로
자연수 n에 대하여 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ …… ㉠
수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.
(ⅰ) $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때,
㉠에 의하여

$b_{2k-1}=2\times\left\{\frac{(2k-1)(a_1+a_{2k-1})}{2}-(2k-1)a_{2k-1}\right\}$
$=(2k-1)(a_1+a_{2k-1})-2(2k-1)a_{2k-1}$
$=(\boxed{2k-1})\times(a_1-a_{2k-1})$

(ⅱ) $n=2k$ (k는 자연수)일 때,
$b_{2k}=(2k-1)a_{2k}$
$b_2=(2-1)a_2=a_2=2$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$b_{2k-1}+b_{2k}$
$=(\boxed{2k-1})\times(a_1-a_{2k-1})+(2k-1)a_{2k}$
$=(2k-1)\times\{a_1+(a_{2k}-a_{2k-1})\}$
$=(2k-1)\times(a_1+d)$
$=(2k-1)\times a_2$
$=\boxed{4k-2}$ …… ㉡
이다.
㉡에 의하여

$\sum_{n=1}^{20}b_n$
$=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{19}+b_{20})$
$=\sum_{k=1}^{10}(b_{2k-1}+b_{2k})$
$=\sum_{k=1}^{10}(4k-2)$
$=4\times\frac{10\times 11}{2}-2\times 10$
$=\boxed{200}$

이다.
$f(k)=2k-1$, $g(k)=4k-2$, $p=200$
따라서 $f(2)+g(3)+p=3+10+200=213$

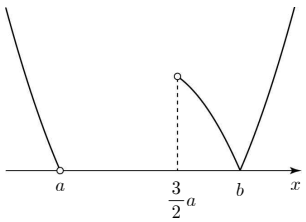
21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

조건 (가)에서 $\lim_{t\to 0+}g(t)=6$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표는
$x=a$, $x=b$, $x=4$이어야 하므로
$a<4\le\frac{3}{2}a$, $b>\frac{3}{2}a$ 또는
$a<4\le\frac{3}{2}a$, $b<a$

$4=\frac{3}{2}a$이면 $\lim_{t\to 0+}g(t)=5$이므로
$4<\frac{3}{2}a$이어야 한다.

(Ⅰ) $a<4<\frac{3}{2}a$, $b>\frac{3}{2}a$인 경우

$x<a$ 또는 $x>\frac{3}{2}a$에서
함수 $y=|(x-a)(x-b)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 양의 실수 m에 대하여
$x<a$ 또는 $x>\frac{3}{2}a$에서
직선 $y=m$과
함수 $y=|(x-a)(x-b)|$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는
2 이상이므로
$\lim_{t\to m+}g(t)\ge 2$이다.
그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(Ⅱ) $a<4<\frac{3}{2}a$, $b<a$인 경우

$\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|=\left|\frac{a}{2}\left(\frac{3}{2}a-4\right)\right|=\frac{a}{2}\left(\frac{3}{2}a-4\right)$

$\lim_{x\to\frac{3}{2}a+}|f(x)|=\left|\frac{a}{2}\left(\frac{3}{2}a-b\right)\right|$
$=\frac{a}{2}\left(\frac{3}{2}a-b\right)$

$b<4$이므로
$\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|<\lim_{x\to\frac{3}{2}a+}|f(x)|$이다.

$\lim_{x\to\frac{3}{2}a+}|f(x)|=k_1$ 이라 하면

$\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|\ge k_1$ 또는

$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|\ge k_1$ 일 때

모든 양의 실수 m 에 대하여

$\lim_{t\to m+}g(t)\ge 2$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|<k_1$ 이고,

$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|<k_1$ 이다.

$\lim_{t\to k_1-}g(t)=1$, $\lim_{t\to k_1+}g(t)=2$ 이므로

함수 $g(t)$ 는 $t=k_1$ 에서 불연속이다.

조건 (나)에 의하여 $\beta=k_1$ 이다.

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여

$b<a<4<\frac{3}{2}a$, $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|<\beta$,

$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|<\beta$, $\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|<\beta$

함수 $g(t)$ 는 $t=\alpha$, $t=\beta$ 에서만 불연속이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|\ne\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$ 인 경우

함수 $g(t)$ 가

$t=\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|$, $t=\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$,

$t=\beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|\ne\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$ 인 경우

함수 $g(t)$ 가

$t=\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$, $t=\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$,

$t=\beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|\ne\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$ 인 경우

함수 $g(t)$ 가

$t=\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|$, $t=\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$,

$t=\beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$ 인 경우

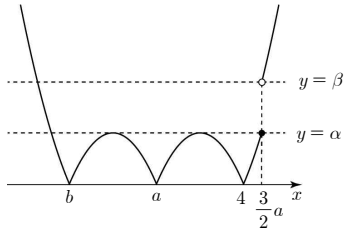
$\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|=k_2$ 라 하면

$\lim_{t\to k_2-}g(t)=6$, $\lim_{t\to k_2+}g(t)=1$ 이므로

함수 $g(t)$ 는 $t=k_2$, $t=\beta$ 에서만 불연속이다.

(ⅰ) ~ (ⅳ)에 의하여 $\alpha=k_2$ 이다.

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$ 이므로

$\frac{(a-4)^2}{4}=\frac{a(3a-8)}{4}$

$a^2-8a+16=3a^2-8a$, $a^2=8$

$a>0$ 이므로 $a=2\sqrt{2}$

$\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$ 이므로

$\frac{(a-b)^2}{4}=\frac{(4-a)^2}{4}$

$b<a<4$ 이므로 $a-b=4-a$

$b=2a-4=4\sqrt{2}-4$

$f(0)=ab=2\sqrt{2}(4\sqrt{2}-4)=16-8\sqrt{2}$

$p=16$, $q=-8$

따라서 $p^2+q^2=256+64=320$

22. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=2^{x-m}+n$,

$g(x)=\log_2(x-n+1)+m-7$ 이라 하자.

점 $A(a,b)$는 제1사분면 위의 점이므로

$0<a<b$

점 B는 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 $B(b,a)$ 이고,

곡선 $y=\log_2(x-n)+m$ 위의 점이다.

곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=\log_2(x-n)+m$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 곡선과 일치한다.

점 B를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 점을 $B'(b-1,a-7)$ 이라 하면

점 B′은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이다.

점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$ 인 원을 C 라 하자.

$\overline{BB'}=5\sqrt{2}$ 이므로

점 B′은 원 C 위의 점이다.

원 C 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 두 점을 $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$ 라 하면 $x_1<x_2$ 이고

함수 $g(x)$ 는 $x>n-1$ 인 실수 전체의 집합에서 증가하므로 $y_1<y_2$

점 B′은 원 C 와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

점 B′은 점 C와 일치하거나 점 D와 일치한다.

점 B′이 점 D와 일치하는 경우

$x_1<b-1$, $y_1<a-7$

$b-x_1>1$, $a-y_1>7$

$\overline{BC}=\sqrt{(b-x_1)^2+(a-y_1)^2}>5\sqrt{2}$ 이므로

점 C가 원 C 위의 점이라는 조건에 모순이다.

그러므로 점 B′은 점 C와 일치한다.

조건 (가)에 의하여

직선 AC의 기울기는

$\frac{a-7-b}{b-1-a}=-3$

$a-7-b=-3(b-1-a)$

$a-b=-5$ … ㉠

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y=-x+a+b$ 이므로

두 점 O, C와 직선 $x+y-a-b=0$ 사이의 거리를 각각 h_1, h_2 라 하면

$h_1=\frac{|-a-b|}{\sqrt{2}}=\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$

$h_2=\frac{|(b-1)+(a-7)-a-b|}{\sqrt{2}}$

$=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_1$ 이고

삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_2$ 이므로

삼각형 AOB와 삼각형 ACB의 넓이의 비는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_1:\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_2=27:8$

$8h_1=27h_2$

$8\times\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}=27\times4\sqrt{2}$

$a+b=27$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=11$, $b=16$

점 A$(11,16)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$2^{11-m}+n=16$

위 식을 만족시키는

두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m,n)은

$(8,8)$, $(9,12)$, $(10,14)$, $(11,15)$이다.

따라서 $m+n$의 최댓값은 $11+15=26$

기하 정답

23	①	24	②	25	⑤	26	④	27	③
28	⑤	29	216	30	52				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 합 계산하기

$\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(-2,1)$에 대하여
$\vec{a}+\vec{b}=(3,1)+(-2,1)=(1,2)$이므로
모든 성분의 합은 3

24. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기

점 $(a,4)$가 포물선 $y^2=4(x-3)$ 위의 점이므로 $4^2=4(a-3)$, $a=7$
포물선 $y^2=4(x-3)$은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로
준선의 방정식은 $x=-1+3=2$
따라서 점 $(7,4)$와 준선 사이의 거리는 $|7-2|=5$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

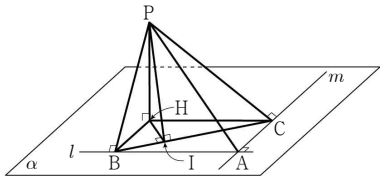
점 $(3\sqrt{2},0)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1,2\sqrt{2})$인 직선의 방정식은
$\frac{x-3\sqrt{2}}{1}=\frac{y}{2\sqrt{2}}$이므로
$2\sqrt{2}x-y-12=0$
원점 O와 직선 $2\sqrt{2}x-y-12=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-12|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=\frac{12}{3}=4$이므로
$|\overrightarrow{OP}|\geq 4$
따라서 $|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값은 4

26. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원 위의 점 $P(6,b)\,(b>0)$에서의 접선의 방정식은
$\frac{6x}{48}+\frac{by}{4b^2}=1$, $y=-\frac{b}{2}x+4b$
점 A의 좌표는 $(8,0)$, 점 B의 좌표는 $(0,4b)$
$\overline{AB}=\sqrt{8^2+(4b)^2}=\sqrt{64+16b^2}$이고
$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\sqrt{48}=8\sqrt{3}$이므로
$64+16b^2=192$, $b=2\sqrt{2}$
$c^2=48-4b^2$이므로 $c=4$
따라서 $b^2\times c=(2\sqrt{2})^2\times 4=32$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기

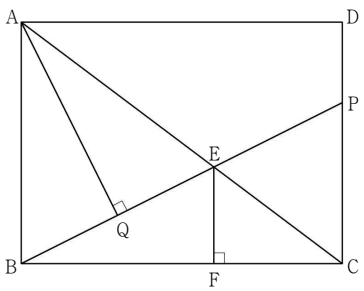
점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{PB}\perp\overline{AB}$이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HB}\perp\overline{AB}$
$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{PC}\perp\overline{AC}$이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HC}\perp\overline{AC}$
$\overline{HB}\perp\overline{AB}$, $\overline{HC}\perp\overline{AC}$이므로
사각형 ACHB는 직사각형이다.
$\overline{AH}=\overline{BC}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$
$\overline{AH}=4$이고 $\overline{PA}=5$이므로
삼각형 PHA에서
$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$
점 H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하자.



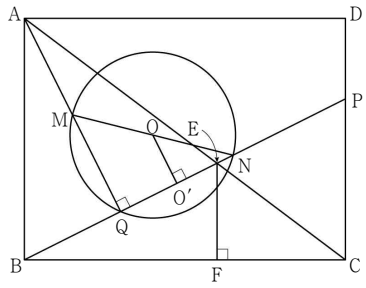
삼각형 HBC에서
$\frac{1}{2}\times 4\times\overline{HI}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2$이므로 $\overline{HI}=\sqrt{3}$
삼각형 PHI에서
$\overline{PI}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$
$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{HI}\perp\overline{BC}$이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PI}\perp\overline{BC}$
$\overline{PI}\perp\overline{BC}$, $\overline{HI}\perp\overline{BC}$이므로
평면 α와 평면 PBC가 이루는 각의 크기는 두 직선 HI와 PI가 이루는 각의 크기와 같다.
$\cos(\angle PIH)=\frac{\overline{HI}}{\overline{PI}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$
삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$
따라서 삼각형 ABC의 평면 PBC 위로의 정사영의 넓이는
$2\sqrt{3}\times\cos(\angle PIH)=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$

28. [출제의도] 벡터의 내적을 활용하여 문제 해결하기

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|^2$에서
두 벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PQ}$가 이루는 각의 크기를 $t\,(0\leq t\leq\pi)$라 하면
$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PA}|\times|\overrightarrow{PQ}|\times\cos t=|\overrightarrow{PQ}|^2$
이므로 $\angle PQA=\frac{\pi}{2}$ … ㉠
$10\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AD}$에서 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$이므로
$10\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$
$2\overrightarrow{BQ}=\frac{2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}}{5}$
선분 AC를 3 : 2로 내분하는 점을 E라 하면
$2\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BE}$이므로
점 Q는 선분 BE의 중점이다.
$\overline{AC}=10$이고 $\overline{AE}=6$이므로
삼각형 ABE는 $\overline{AB}=\overline{AE}$인 이등변삼각형이다.
그러므로 $\overline{AQ}\perp\overline{BQ}$



㉠에 의하여 세 점 B, Q, P는 한 직선 위에 있다.
점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 F라 하면
두 삼각형 ABC와 EFC는 서로 닮음이고
닮음비가 5 : 2이므로
$\overline{EF}=\frac{2}{5}\times\overline{AB}=\frac{12}{5}$
$\overline{FC}=\frac{2}{5}\times\overline{BC}=\frac{16}{5}$
$\overline{BF}=\overline{BC}-\overline{FC}=\frac{24}{5}$
$\overline{BE}=\sqrt{\overline{BF}^2+\overline{EF}^2}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$이므로
$\overline{BQ}=\frac{1}{2}\times\overline{BE}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$
두 삼각형 BFE와 BCP는 서로 닮음이고
닮음비가 3 : 5이므로
$\overline{BP}=\frac{5}{3}\times\overline{BE}=4\sqrt{5}$
$\overline{PQ}=\overline{BP}-\overline{BQ}=4\sqrt{5}-\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$
$(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{QR})\cdot(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QR})=0$에서
$\left(\frac{\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{QR}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QR}}{2}\right)=0$이므로
선분 AQ의 중점을 M,
선분 PQ의 중점을 N이라 하면
점 R은 두 점 M과 N을 지름의 양 끝점으로 하는 원 위의 점이다.
이 원의 중심을 O, 점 O에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 O′이라 하자.



$\overrightarrow{BR}\cdot\overrightarrow{QP}=(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OR})\cdot\overrightarrow{QP}$
$=\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{QP}$
$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{QP}=|\overrightarrow{BO'}|\times|\overrightarrow{QP}|$
$\overrightarrow{BO'}=\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QO'}=\overrightarrow{BQ}+\frac{1}{2}\times\overrightarrow{NQ}$
$\overrightarrow{NQ}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{PQ}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$
$\overrightarrow{BO'}=\overrightarrow{BQ}+\frac{1}{2}\times\overrightarrow{NQ}$
$=\frac{6\sqrt{5}}{5}+\frac{7\sqrt{5}}{10}=\frac{19\sqrt{5}}{10}$
$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{QP}=|\overrightarrow{BO'}|\times|\overrightarrow{QP}|$
$=\frac{19\sqrt{5}}{10}\times\frac{14\sqrt{5}}{5}=\frac{133}{5}$ … ㉡
두 벡터 $\overrightarrow{OR}$과 $\overrightarrow{QP}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0\leq\theta\leq\pi)$라 하면
$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{QP}=|\overrightarrow{OR}|\times|\overrightarrow{QP}|\times\cos\theta$
$|\overrightarrow{OR}|=\frac{1}{2}\times\overline{MN}$
삼각형 AQB에서
$\overline{AQ}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BQ}^2}$

$= \sqrt{6^2 - \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

$\overline{MQ} = \frac{1}{2} \times \overline{AQ} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

삼각형 MQN 에서

$\overline{MN} = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{NQ}^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{17}$

$|\overrightarrow{OR}| = \frac{1}{2} \times \overline{MN} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{QP} = |\overrightarrow{OR}| \times |\overrightarrow{QP}| \times \cos\theta$

$= \frac{\sqrt{17}}{2} \times \frac{14\sqrt{5}}{5} \times \cos\theta$

$= \frac{7\sqrt{85}}{5}\cos\theta$

$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{QP}$ 의 최댓값은

$\theta = 0$ 일 때, $\frac{7\sqrt{85}}{5}$ … ㉢

$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{QP}$ 의 최솟값은

$\theta = \pi$ 일 때, $-\frac{7\sqrt{85}}{5}$ … ㉣

㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{QP}$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은

$M = \frac{133 + 7\sqrt{85}}{5}$, $m = \frac{133 - 7\sqrt{85}}{5}$

따라서

$M + m = \frac{133 + 7\sqrt{85}}{5} + \frac{133 - 7\sqrt{85}}{5} = \frac{266}{5}$

29. [출제의도] 포물선과 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제 해결하기

포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ 이므로

포물선 위의 점 P 의 좌표를 (m, n) $(m > 0, n > 0)$ 이라 하면 $n^2 = 4pm$

점 P 에서 직선 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 P′ 이라 하면

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PP'} = \overline{PF}$ 이므로

$\overline{PF} = p + m$

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 S 라 하면

$\overline{SF} = p - m$

$\cos(\angle PFF') = \frac{1}{5}$ 이므로

$\frac{\overline{SF}}{\overline{PF}} = \frac{p-m}{p+m} = \frac{1}{5}$, $m = \frac{2}{3}p$

$\overline{SF} = \frac{p}{3}$ 이므로

$\overline{PS} = \sqrt{\overline{PF}^2 - \overline{SF}^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}p$

$\overline{F'S} = \frac{5}{3}p$ 이므로

$\overline{PF'} = \sqrt{\overline{PS}^2 + \overline{F'S}^2} = \frac{7}{3}p$

$\overline{F'P} : \overline{F'R} = \overline{F'F} : \overline{F'O} = 2 : 1$ 이므로

두 삼각형 PF′F 와 RF′O 는 서로 닮음이다.

$\overline{RF'} = \frac{1}{2} \times \overline{PF'} = \frac{7}{6}p$

쌍곡선의 주축의 길이를 $2a$ 라 하면

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{RF'} - \overline{RO} = \overline{QO} - \overline{QF'} = 2a$

삼각형 QOR 의 둘레의 길이는

$\overline{RQ} + \overline{QO} + \overline{RO} = (\overline{RF'} - \overline{QF'}) + \overline{QO} + \overline{RO}$

$= \overline{RF'} + (\overline{QO} - \overline{QF'}) + \overline{RO}$

$= \overline{RF'} + (\overline{RF'} - \overline{RO}) + \overline{RO}$

$= 2\overline{RF'} = 14$ 이므로

$\overline{RF'} = 7$

그러므로 $\frac{7}{6}p = 7$, $p = 6$

$\overline{F'O} = p = 6$, $\overline{PS} = \frac{2\sqrt{6}}{3}p = 4\sqrt{6}$ 이고

삼각형 PRO 의 넓이는

삼각형 PF′O 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{F'O} \times \overline{PS}\right) = 6\sqrt{6}$

따라서 $S^2 = 216$

30. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여 추론하기

$\angle ADB = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = 10\sqrt{5}$, $\overline{AD} = 10$ 이므로

$\overline{BD} = 20$

점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

조건 (가)에 의하여 네 점 P, D, H, B 는 한 평면 위에 있다.

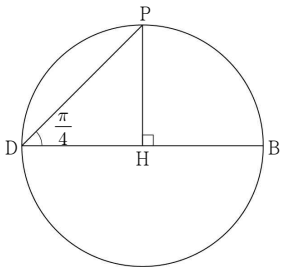
$\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{BD} \perp \overline{AD}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PD} \perp \overline{AD}$

구 S 와 평면 PBD 가 만나는 교선은 선분 BD 가 지름인 원이고

조건 (나)에 의하여 $\angle PDH = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{DH} = \overline{PH} = \overline{BH} = 10$ 이고 $\overline{PB} = 10\sqrt{2}$

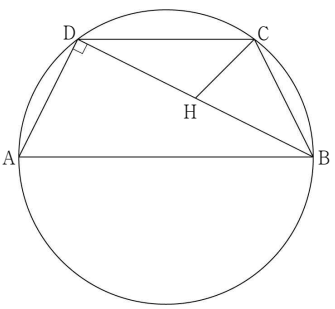


삼각형 BDA 는 직각삼각형이므로

$\cos(\angle DAB) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

사각형 ABCD 가 등변사다리꼴이므로

$\overline{CD} = 10\sqrt{5} - 2 \times \overline{AD} \times \cos(\angle DAB) = 6\sqrt{5}$



$\angle BDC = \angle ABD$ 이므로

$\cos(\angle BDC) = \cos(\angle ABD) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

삼각형 DHC 에서

$\overline{CH}^2$

$= \overline{DH}^2 + \overline{DC}^2 - 2 \times \overline{DH} \times \overline{DC} \times \cos(\angle HDC)$

$= 10^2 + (6\sqrt{5})^2 - 2 \times 10 \times 6\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 40$

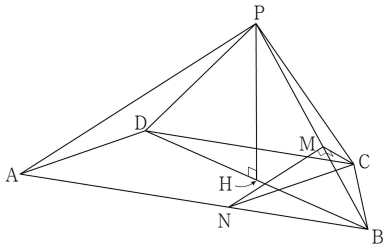
$\overline{CH} = 2\sqrt{10}$

삼각형 PHC 에서

$\overline{PC} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{CH}^2}$

$= \sqrt{10^2 + (2\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{35}$

점 C 에서 선분 PB 에 내린 수선의 발을 M, 점 M 을 지나고 선분 PB 에 수직인 직선이 선분 AB 와 만나는 점을 N 이라 하자.



평면 PAB 와 평면 PBC 가 이루는 각의 크기는 두 직선 MN 과 MC 가 이루는 각의 크기와 같다.

삼각형 PBC 에서

$\overline{PC}^2 - (\overline{PB} - \overline{MB})^2 = \overline{BC}^2 - \overline{MB}^2$

$(2\sqrt{35})^2 - (10\sqrt{2} - \overline{MB})^2 = 10^2 - \overline{MB}^2$

$\overline{MB} = 4\sqrt{2}$

$\overline{CM} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{MB}^2}$

$= \sqrt{10^2 - (4\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{17}$

점 P 가 구 S 위의 점이므로 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$

두 삼각형 BPA 와 BMN 은 서로 닮음이고 닮음비가 5 : 2 이다.

$\overline{NB} = \frac{2}{5} \times \overline{AB} = 4\sqrt{5}$ 이고 $\overline{AN} = 6\sqrt{5}$

$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{PB}^2}$

$= \sqrt{(10\sqrt{5})^2 - (10\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{3}$

$\overline{NM} = \frac{2}{5} \times \overline{AP} = 4\sqrt{3}$

$\overline{AN} = \overline{CD} = 6\sqrt{5}$ 이므로

사각형 ANCD 는 평행사변형이다.

그러므로 $\overline{CN} = \overline{AD} = 10$

삼각형 CMN 에서

$\cos(\angle NMC) = \frac{\overline{NM}^2 + \overline{CM}^2 - \overline{CN}^2}{2 \times \overline{NM} \times \overline{CM}}$

$= \frac{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{17})^2 - 10^2}{2 \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{17}}$

$= \frac{\sqrt{51}}{51}$

$\cos^2\theta = \cos^2(\angle NMC) = \frac{1}{51}$

$p = 51$, $q = 1$

따라서 $p + q = 52$