제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $5^{-\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{3}{4}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{5}$ ③ 5 ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ 25

2. 함수 $f(x)=x^2+3x-1$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(k+3a_k)=27$일 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<1) \\ x^2-ax+11 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+2x)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

6. 1보다 큰 두 실수 a, b가

$$\log_{\sqrt{a}} b=6,\quad \log_4 a+\log_2 b=14$$

를 만족시킬 때, $\log_2 \frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

7. 함수 $f(x)=x^3+x^2+a$에 대하여

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{40}{3}+\int_0^{-2} f(x)\,dx$$

일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{11}{6}$ ② 2 ③ $\frac{13}{6}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

8. $2\cos\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=0$ 이고 $\sin\theta<0$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

9. 양수 t 에 대하여 함수 $f(x)=2x^3-7x^2+1$ 의 그래프 위의 점 $\big(t, f(t)\big)$ 에서의 접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나도록 하는 t 의 값은? [4점]

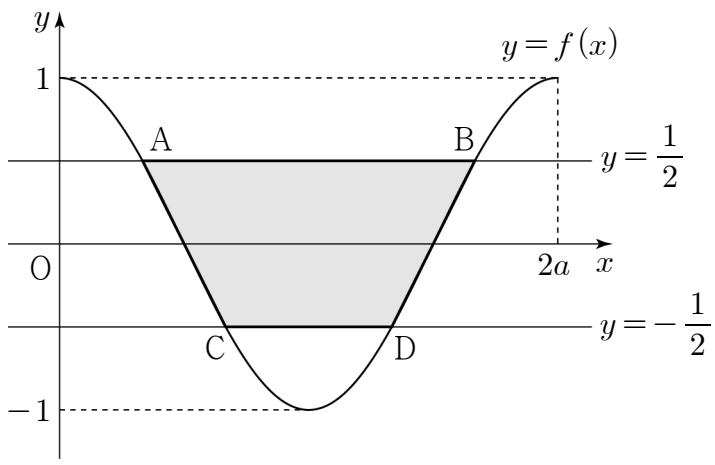
① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

10. 양수 a 에 대하여 닫힌구간 $[0, 2a]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{a}$ 가 있다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$ 과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$ 과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자.

사각형 ACDB의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, $a\times\overline{AB}$ 의 값은?
(단, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작고, 점 C의 x 좌표는 점 D의 x 좌표보다 작다.) [4점]

① 3 ② $\frac{19}{6}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{11}{3}$



11. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k에 대하여 시각이 $t\,(t \geq 0)$ 일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-6t+k$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=0$이면, 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 -2이다.
ㄴ. $k=2$이면, 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 점 P의 위치의 변화량과 같다.
ㄷ. $k=-9$이면, 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는 34이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

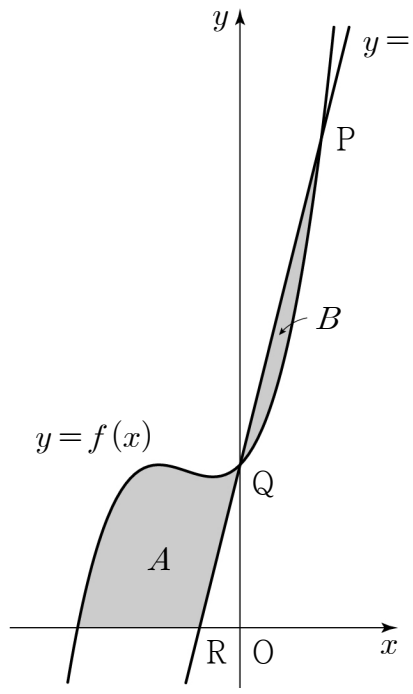
12. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_5 \times (a_6+a_7)=20\,a_{10}, \quad S_4=65$$

일 때, a_2의 값은? [4점]

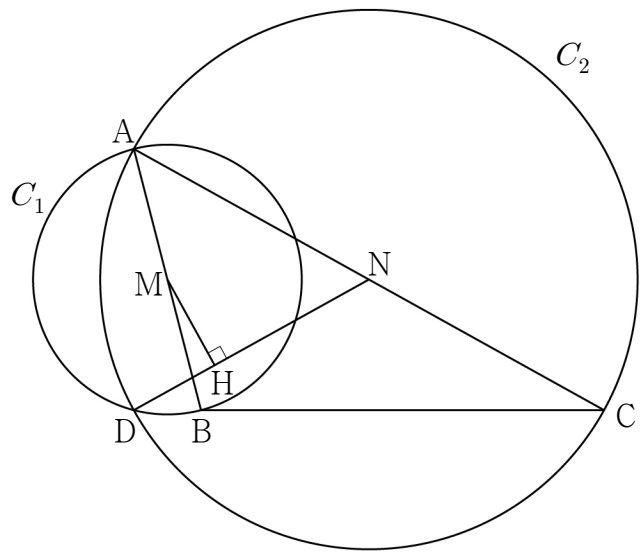
① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3+2x^2+x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+2$가 제1사분면에서 만나는 점을 P, y축 위에서 만나는 점을 Q라 하자. 직선 $y=4x+2$가 x축과 만나는 점을 R이라 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 선분 RQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 QP로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A-B$의 값은? [4점]



① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

14. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=8$, $\angle CBA>\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{16\sqrt{15}}{15}$이다. 선분 AB의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N이라 할 때, 두 점 M, N을 각각 중심으로 하고 점 A를 지나는 두 원 C_1, C_2가 있다. 두 원 C_1, C_2가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 점 M에서 선분 DN에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 MH의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{15}}{16}$ ② $\frac{11\sqrt{15}}{32}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{8}$
④ $\frac{3\sqrt{15}}{8}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

15. 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}ax^2+b,\quad g(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2$$

이 있다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)+|f(x)-g(x)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이고
$x=\alpha$, $x=\beta\,(\alpha<\beta)$에서 극소이다.

$h(\alpha)\geq h(\beta)$일 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{n}+4$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=3x^2+4$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)+F(2)=14$일 때, $F(3)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 부등식

$$\log_3(x+4) \le 3+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

19. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수

$$f(x) = x^3 - 12x + k$$

의 최댓값이 40일 때, 최솟값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} 2(S_n - na_n) & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ (n-1)a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다.

다음은 $b_2 = 2$일 때, $\sum_{n=1}^{20} b_n$의 값을 구하는 과정이다.

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

자연수 n에 대하여 $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ …… ㉠

(i) $n = 2k-1$ (k는 자연수)일 때,

㉠에 의하여

$$b_{2k-1} = 2\times\left\{\frac{(2k-1)(a_1+a_{2k-1})}{2} - (2k-1)a_{2k-1}\right\}$$

$$= (\boxed{\text{(가)}})\times(a_1 - a_{2k-1})$$

(ii) $n = 2k$ (k는 자연수)일 때,

$$b_{2k} = (2k-1)a_{2k}$$

(i), (ii)에 의하여

$$b_{2k-1} + b_{2k} = (\boxed{\text{(가)}})\times(a_1 - a_{2k-1}) + (2k-1)a_{2k}$$

$$= \boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이다.

㉡에 의하여

$$\sum_{n=1}^{20} b_n = (b_1+b_2) + (b_3+b_4) + \cdots + (b_{19}+b_{20})$$

$$= \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(2)+g(3)+p$의 값을 구하시오. [4점]

21. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)(x-4) & \left(a \le x \le \frac{3}{2}a\right)\\ (x-a)(x-b) & \left(x < a \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}a\right)\end{cases}$$

이다. 양의 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to 0+} g(t)=6$

(나) 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=\beta\,(\alpha\neq\beta)$에서만 불연속이고, $\lim_{t\to\alpha+} g(t)=\lim_{t\to\beta-} g(t)=1$이다.

$f(0)=p+q\sqrt{2}$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

22. 두 자연수 m, n에 대하여 곡선 $y=2^{x-m}+n$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,b)\,(a<b)$가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$인 원이 곡선 $y=\log_2(x-n+1)+m-7$과 만나는 두 점 중 x좌표가 작은 점을 C라 할 때, 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 AC와 직선 $y=\frac{1}{3}x$는 서로 수직이다.

(나) 삼각형 AOB와 삼각형 ACB의 넓이의 비는 27 : 8이다.

$m+n$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(-2,1)$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

24. 포물선 $y^2=4(x-3)$ 위의 점 $(a,4)$와 포물선의 준선 사이의 거리는? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

25. 점 $(3\sqrt{2}, 0)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, 2\sqrt{2})$인 직선 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

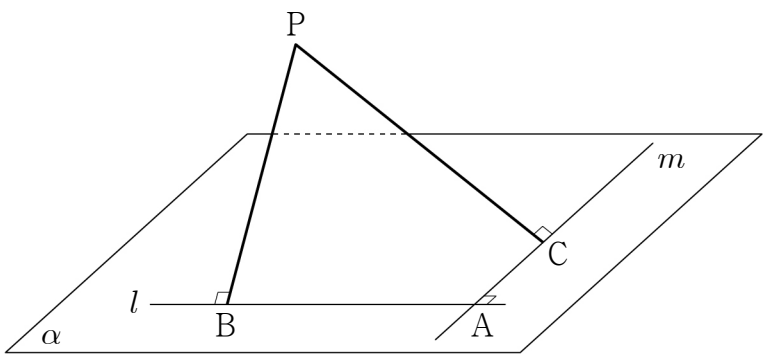
① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

26. 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ 위에 있는 제1사분면 위의 점 $P(6, b)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{AB}$일 때, $b^2\times c$의 값은? [3점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

27. 공간에 점 A에서 서로 수직으로 만나는 두 직선 l, m을 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 두 직선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 할 때, $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AC}=2$이다. $\overline{PA}=5$일 때, 삼각형 ABC의 평면 PBC 위로의 정사영의 넓이는? (단, 점 B는 점 A가 아니고, 점 C는 점 A가 아니다.) [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

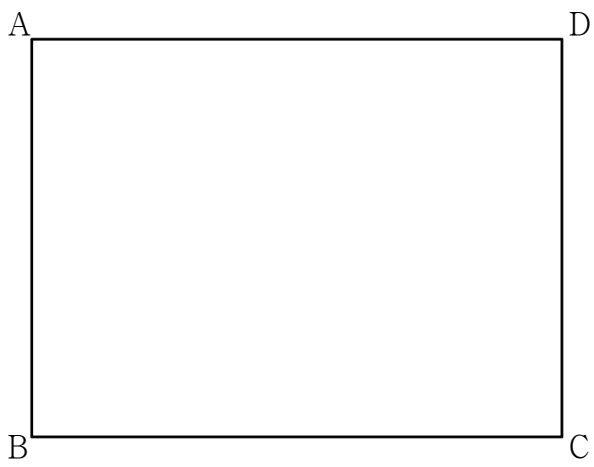


28. 좌표평면에 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=8$인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 CD 위의 한 점 P와 직사각형 ABCD 내부의 한 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|^2$
(나) $10\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AD}$

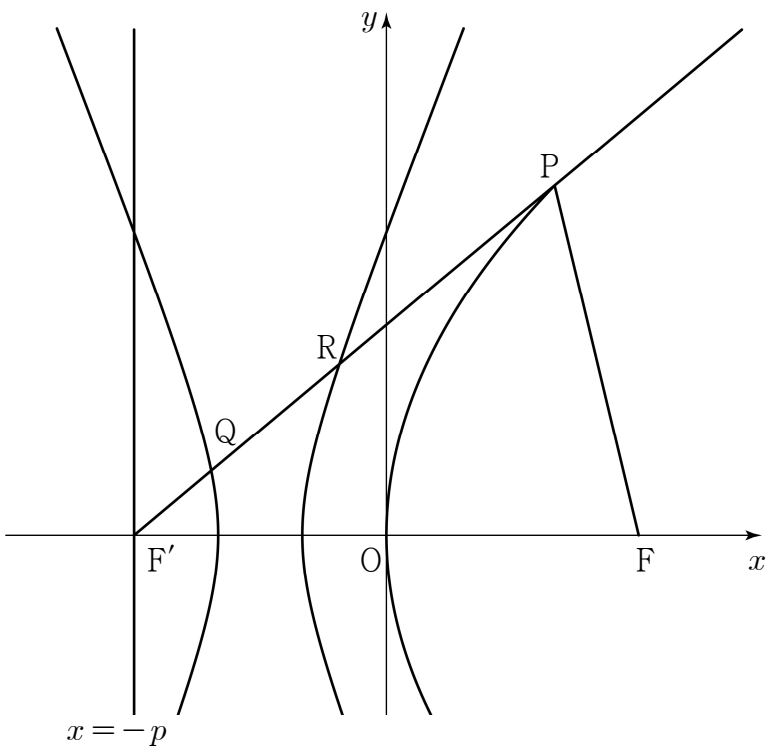
$(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{QR})\cdot(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QR})=0$을 만족시키는 점 R에 대하여 $\overrightarrow{BR}\cdot\overrightarrow{QP}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{226}{5}$ ② $\frac{236}{5}$ ③ $\frac{246}{5}$ ④ $\frac{256}{5}$ ⑤ $\frac{266}{5}$



단답형

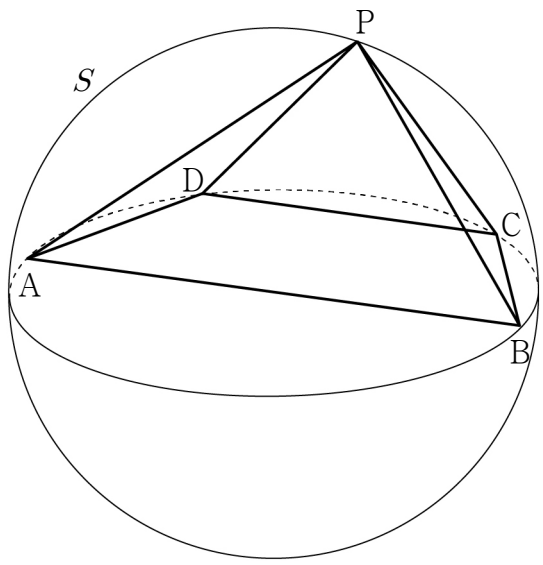
29. 초점이 $\mathrm{F}(p, 0)\,(p>0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선이 있다. 점 $\mathrm{F}'(-p, 0)$에 대하여 $\cos(\angle \mathrm{PFF}')=\frac{1}{5}$을 만족시키는 이 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고, 선분 PF'의 중점을 R이라 하자. 두 점 O, F'을 초점으로 하고 점 R을 지나는 쌍곡선에 대하여 선분 PF'과 쌍곡선이 만나는 점 중 R이 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 QOR의 둘레의 길이가 14일 때, 삼각형 PRO의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



30. 공간에 $\overline{\mathrm{AB}}=10\sqrt{5}$인 선분 AB를 지름으로 하는 구 S가 있다. 구 S 위의 두 점 C, D에 대하여 네 점 A, B, C, D는 평면 α 위에 있고, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}=10$이다. 구 S 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P의 평면 α 위로의 정사영은 선분 BD 위에 있다.
(나) 평면 PAD와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$이다.

평면 PAB와 평면 PBC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{CD}}<\overline{\mathrm{AB}}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.