수학 영역

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정답

1	③	2	②	3	①	4	⑤	5	④
6	③	7	②	8	④	9	⑤	10	①
11	③	12	①	13	②	14	④	15	①
16	7	17	38	18	12	19	24	20	213
21	320	22	26						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$5^{-\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}} \times (5^2)^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 5$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x) = 2x + 3$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = 9$

3. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 계산하기

$\sum_{k=1}^{5} (k + 3a_k) = \sum_{k=1}^{5} k + 3\sum_{k=1}^{5} a_k$

$= \frac{5 \times 6}{2} + 3\sum_{k=1}^{5} a_k = 27$

$3\sum_{k=1}^{5} a_k = 27 - 15 = 12$

따라서 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 4$

4. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 1$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (2x + a) = 2 + a$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x^2 - ax + 11) = 12 - a$

$f(1) = 12 - a$

$2 + a = 12 - a$, $2a = 10$

따라서 $a = 5$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$g'(x) = (2x + 2)f(x) + (x^2 + 2x)f'(x)$

$g'(1) = 4f(1) + 3f'(1) = 4 \times 2 + 3 \times 1 = 11$

6. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_{\sqrt{a}} b = 6$에서 $b = (\sqrt{a})^6 = a^3$

$\log_4 a + \log_2 b = \log_4 a + \log_4 b^2$

$= \log_4 ab^2$

$= \log_4 a(a^3)^2$

$= \log_4 a^7$

$= 7\log_4 a = 14$

$\log_4 a = 2$, $a = 4^2 = 16$, $b = 16^3$

$\log_2 \frac{b}{a} = \log_2 \frac{16^3}{16} = \log_2 16^2 = \log_2 2^8 = 8$

7. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^{-2} f(x)\,dx$

$= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_{-2}^0 f(x)\,dx$

$= \int_{-2}^2 f(x)\,dx = \frac{40}{3}$

$\int_{-2}^2 (x^3 + x^2 + a)\,dx = 2\int_0^2 (x^2 + a)\,dx$

$= 2\left[\frac{1}{3}x^3 + ax\right]_0^2$

$= \frac{16}{3} + 4a$

$\frac{16}{3} + 4a = \frac{40}{3}$, $4a = 8$

따라서 $a = 2$

8. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ 이므로

$2\cos\theta + \sin\theta = 0$

$2\cos\theta = -\sin\theta$ … ㉠

$4\cos^2\theta = \sin^2\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로

$4\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

$\sin\theta < 0$ 이므로

㉠에 의하여 $\cos\theta > 0$

따라서 $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

9. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$f'(x) = 6x^2 - 14x$

함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$ $(t > 0)$에서의 접선의 방정식은

$y = f'(t)(x - t) + f(t)$

$y = (6t^2 - 14t)(x - t) + 2t^3 - 7t^2 + 1$

접선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1 = (6t^2 - 14t)(0 - t) + 2t^3 - 7t^2 + 1$

$1 = -4t^3 + 7t^2 + 1$

$4t^3 - 7t^2 = t^2(4t - 7) = 0$

따라서 $t = \frac{7}{4}$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

함수 $y = \cos\frac{\pi x}{a}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = 2a$

$0 \le x \le 2a$에서 $\cos\frac{\pi x}{a} = \frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{a} = \frac{5\pi}{3}$ 이므로

$x = \frac{a}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}a$

점 A의 좌표는 $\left(\frac{a}{3}, \frac{1}{2}\right)$

점 B의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}a, \frac{1}{2}\right)$

$0 \le x \le 2a$에서 $\cos\frac{\pi x}{a} = -\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{a} = \frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{a} = \frac{4\pi}{3}$ 이므로

$x = \frac{2}{3}a$ 또는 $x = \frac{4}{3}a$

점 C의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}a, -\frac{1}{2}\right)$

점 D의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}a, -\frac{1}{2}\right)$

$\overline{AB} = \frac{4}{3}a$, $\overline{CD} = \frac{2}{3}a$

사각형 ACDB는 사다리꼴이므로

사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}a + \frac{2}{3}a\right) \times 1 = a = \frac{3}{2}$

$\overline{AB} = \frac{4}{3}a = 2$

따라서 $a \times \overline{AB} = \frac{3}{2} \times 2 = 3$

11. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 문제 해결하기

시각이 $t\,(t \ge 0)$일 때 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 $x(0) = 0$

ㄱ. $k = 0$이면, $v(t) = 3t^2 - 6t$

$x(1) = x(0) + \int_0^1 v(t)\,dt$

$= \int_0^1 (3t^2 - 6t)\,dt$

$= \left[t^3 - 3t^2\right]_0^1 = -2$ (참)

ㄴ. $k = 2$이면, $v(t) = 3t^2 - 6t + 2$

시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리와 점 P의 위치의 변화량이 같아지려면 $0 \le t \le 3$인 모든 t에 대하여 $v(t) \ge 0$이어야 한다.

$v(1) = -1$이므로

시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리는 점 P의 위치의 변화량과 같지 않다. (거짓)

ㄷ. $k = -9$이면, $v(t) = 3t^2 - 6t - 9$

$3t^2 - 6t - 9 = 3(t + 1)(t - 3)$이므로

시각 $t = 0$에서 $t = 4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4 |v(t)|\,dt$

$= \int_0^3 (-3t^2 + 6t + 9)\,dt + \int_3^4 (3t^2 - 6t - 9)\,dt$

$= \left[-t^3 + 3t^2 + 9t\right]_0^3 + \left[t^3 - 3t^2 - 9t\right]_3^4$

$= 27 + 7 = 34$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

12. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 $a\,(a>0)$,
공비를 $r\,(r>0)$ 이라 하자.
$a_n = ar^{n-1}$ (단, n 은 자연수)
$a_5 \times (a_6 + a_7) = 20\,a_{10}$ 이므로

$ar^4 \times (ar^5 + ar^6) = 20ar^9$
양변을 ar^9 으로 나누면
$a(1+r) = 20$
$a = \dfrac{20}{1+r}$ … ㉠
$r = 1$ 인 경우 $a = 10$, $S_4 = 40$
그러므로 $S_4 = 65$ 를 만족시키지 않는다.
공비 r 은 1이 아닌 양수이므로
$S_4 = \dfrac{a(r^4-1)}{r-1}$
$= \dfrac{20}{1+r} \times \dfrac{r^4-1}{r-1}$
$= \dfrac{20(r^2+1)(r^2-1)}{r^2-1}$
$= 20(r^2+1)$
$= 65$
$r^2 + 1 = \dfrac{65}{20} = \dfrac{13}{4}$, $r^2 = \dfrac{9}{4}$
$r > 0$ 이므로 $r = \dfrac{3}{2}$
㉠에 의하여 $a = 8$
따라서 $a_2 = ar = 8 \times \dfrac{3}{2} = 12$

13. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1)$
이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축이 만나는
점의 좌표는 $(-2, 0)$
$g(x) = 4x + 2$ 라 하면
$f(x) = g(x)$ 에서
$x^3 + 2x^2 + x + 2 = 4x + 2$
$x(x-1)(x+3) = 0$
$x = -3$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 이므로
점 P 의 좌표는 $(1, 6)$, 점 Q 의 좌표는 $(0, 2)$
$g(x) = 0$ 에서
$4x + 2 = 0$
$x = -\dfrac{1}{2}$ 이므로 점 R 의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$

$A = \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \{f(x) - g(x)\}\,dx$

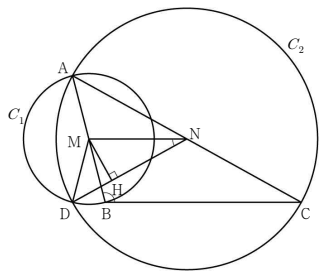
$B = \displaystyle\int_{0}^{1} \{g(x) - f(x)\}\,dx$

$A - B$
$= \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \{f(x) - g(x)\}dx - \int_{0}^{1} \{g(x) - f(x)\}dx$
$= \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \{f(x) - g(x)\}\,dx + \int_{0}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx$
$= \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx$
$= \displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{1} g(x)\,dx$
$= \displaystyle\int_{-2}^{1} (x^3 + 2x^2 + x + 2)\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (4x + 2)\,dx$
$= \left[\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} - \left[2x^2 + 2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$
$= \dfrac{9}{4}$

따라서 $A - B = \dfrac{9}{4}$

[참고]
점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면
$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} g(x)\,dx$ 의 값은
삼각형 RHP 의 넓이와 같다.
$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} g(x)\,dx = \frac{1}{2} \times \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \times 6 = \frac{9}{2}$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기



$\angle CBA = \theta$ 라 하자.
삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta} = \dfrac{8}{\sin\theta} = 2 \times \dfrac{16\sqrt{15}}{15}$
$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\cos\theta = -\dfrac{1}{4}$

$\overline{BC} = a\,(a>0)$ 이라 하자.
삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\theta = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}}$
$-\dfrac{1}{4} = \dfrac{16 + a^2 - 64}{2 \times 4 \times a}$
$a^2 + 2a - 48 = 0$, $(a-6)(a+8) = 0$
$a = 6$
두 점 M, N 은 각각 선분 AB 와 선분 AC 의
중점이므로 $\overline{MN} = \dfrac{1}{2} \times \overline{BC} = 3$
점 D 는 원 C_1 위의 점이므로 $\overline{MD} = 2$
점 D 는 원 C_2 위의 점이므로 $\overline{DN} = 4$
$\angle MND = \alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 라 하자.
삼각형 MDN 에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\alpha = \dfrac{\overline{MN}^2 + \overline{DN}^2 - \overline{MD}^2}{2 \times \overline{MN} \times \overline{DN}}$
$= \dfrac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \dfrac{7}{8}$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{7}{8}\right)^2 = \dfrac{15}{64}$
$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$
따라서 직각삼각형 MHN 에서
$\overline{MH} = \overline{MN} \times \sin\alpha = 3 \times \dfrac{\sqrt{15}}{8} = \dfrac{3\sqrt{15}}{8}$

[다른 풀이]
$\overline{AB} = 2\overline{AM}$, $\overline{AC} = 2\overline{AN}$,
$\angle MAN$ 은 공통이므로
두 삼각형 ABC 와 AMN 은 서로 닮음이고
닮음비는 2 : 1, 넓이의 비는 4 : 1 이다.
$\overline{AM} = \overline{DM}$, $\overline{AN} = \overline{DN}$ 이고
선분 MN 은 공통이므로
두 삼각형 AMN 과 DMN 은 서로 합동이다.
삼각형 ABC 의 넓이는
$\dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin\theta = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \dfrac{\sqrt{15}}{4}$
$= 3\sqrt{15}$
삼각형 DMN 의 넓이는
$\dfrac{1}{4} \times 3\sqrt{15} = \dfrac{1}{2} \times \overline{DN} \times \overline{MH}$
$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times \overline{MH}$
따라서 $\overline{MH} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3\sqrt{15}}{4} = \dfrac{3\sqrt{15}}{8}$

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$p(x) = f(x) - g(x)$ 라 하자.
$h(x) = f(x) + |p(x)|$
함수 $h(x)$ 는 $p(x) \neq 0$ 인 모든 실수 x 에서
미분가능하다.
조건 (가)에 의하여 $p(-1) = 0$, $p'(-1) \neq 0$
$p(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}ax^2 + b$
$p(-1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}a + b = 0$, $b = \dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{2}$
$p'(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 - ax$
$p'(-1) = -\dfrac{3}{2} + a \neq 0$, $a \neq \dfrac{3}{2}$
$p(x) = -\dfrac{1}{2}(x+1)\{x^2 + (a-1)x - (a-1)\}$ 에서
$a \neq \dfrac{3}{2}$ 이므로
x 에 대한 방정식 $x^2 + (a-1)x - (a-1) = 0$ 은
-1 을 근으로 갖지 않는다.
x 에 대한 방정식 $x^2 + (a-1)x - (a-1) = 0$ 의
판별식을 D 라 하면
$D = (a-1)^2 + 4(a-1) = (a-1)(a+3)$
$D > 0$ 이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $D \leq 0$, $-3 \leq a \leq 1$ … ㉡

$$h(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3+a-1 & (x\le -1)\\ \frac{2}{3}x^3+ax^2 & (x>-1)\end{cases}$$

$$h'(x)=\begin{cases}-x^2 & (x<-1)\\ 2x^2+2ax & (x>-1)\end{cases}$$

조건 (나)에 의하여
함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이므로
$a<0$ … ㉡
함수 $h(x)$는 $x=-1$, $x=-a$에서 극소이므로
$\alpha=-1$, $\beta=-a$

$h(\alpha)=h(-1)=\frac{1}{3}+a-1=a-\frac{2}{3}$

$h(\beta)=h(-a)=\frac{1}{3}a^3$

$h(\alpha)\ge h(\beta)$, $a-\frac{2}{3}\ge\frac{1}{3}a^3$

$(a-1)^2(a+2)\le 0$
$a=1$ 또는 $a\le -2$ … ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $-3\le a\le -2$

$b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$이므로

$a+b=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}$

$M=\frac{3}{2}\times(-2)-\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$

$m=\frac{3}{2}\times(-3)-\frac{1}{2}=-5$

따라서 $M-m=-\frac{7}{2}-(-5)=\frac{3}{2}$

16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1=2$

$a_2=\frac{a_1}{1}+4=6$

$a_3=\frac{a_2}{2}+4=7$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$F(x)=\int f(x)\,dx$
$=\int(3x^2+4)\,dx$
$=x^3+4x+C$ (단, C는 적분상수)
$F(0)+F(2)=C+(16+C)=14$
$C=-1$
$F(x)=x^3+4x-1$
따라서 $F(3)=27+12-1=38$

18. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

로그의 진수는 양수이므로
$x+4>0$, $x-2>0$
$x>2$ … ㉠
$\log_3(x+4)\le 3+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

$\log_3(x+4)-\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\le 3$

$\log_3(x+4)+\log_3(x-2)\le 3$
$\log_3(x+4)(x-2)\le \log_3 27$
로그의 밑이 1보다 크므로
$(x+4)(x-2)\le 27$
$x^2+2x-35\le 0$
$(x-5)(x+7)\le 0$
$-7\le x\le 5$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2<x\le 5$이므로
정수 x의 값은 3, 4, 5
따라서 구하는 모든 정수 x의 값의 합은 12

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	2	…	3
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	k	↘	$k-16$	↗	$k-9$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 k를 갖고,
$x=2$에서 극소이면서 최솟값 $k-16$을 갖는다.
$f(0)=k=40$이므로
$k=40$
따라서 닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=k-16=24$

20. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로
자연수 n에 대하여 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ …… ㉠
수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.
(ⅰ) $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때,
㉠에 의하여

$b_{2k-1}=2\times\left\{\frac{(2k-1)(a_1+a_{2k-1})}{2}-(2k-1)a_{2k-1}\right\}$
$=(2k-1)(a_1+a_{2k-1})-2(2k-1)a_{2k-1}$
$=(\boxed{2k-1})\times(a_1-a_{2k-1})$

(ⅱ) $n=2k$ (k는 자연수)일 때,
$b_{2k}=(2k-1)a_{2k}$
$b_2=(2-1)a_2=a_2=2$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$b_{2k-1}+b_{2k}$
$=(\boxed{2k-1})\times(a_1-a_{2k-1})+(2k-1)a_{2k}$
$=(2k-1)\times\{a_1+(a_{2k}-a_{2k-1})\}$
$=(2k-1)\times(a_1+d)$
$=(2k-1)\times a_2$
$=\boxed{4k-2}$ …… ㉡
이다.
㉡에 의하여

$\sum_{n=1}^{20}b_n$
$=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{19}+b_{20})$
$=\sum_{k=1}^{10}(b_{2k-1}+b_{2k})$
$=\sum_{k=1}^{10}(4k-2)$
$=4\times\frac{10\times 11}{2}-2\times 10$
$=\boxed{200}$

이다.
$f(k)=2k-1$, $g(k)=4k-2$, $p=200$
따라서 $f(2)+g(3)+p=3+10+200=213$

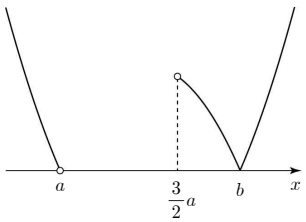
21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

조건 (가)에서 $\lim_{t\to 0+}g(t)=6$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표는
$x=a$, $x=b$, $x=4$이어야 하므로
$a<4\le\frac{3}{2}a$, $b>\frac{3}{2}a$ 또는
$a<4\le\frac{3}{2}a$, $b<a$

$4=\frac{3}{2}a$이면 $\lim_{t\to 0+}g(t)=5$이므로
$4<\frac{3}{2}a$이어야 한다.

(Ⅰ) $a<4<\frac{3}{2}a$, $b>\frac{3}{2}a$인 경우

$x<a$ 또는 $x>\frac{3}{2}a$에서
함수 $y=|(x-a)(x-b)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 양의 실수 m에 대하여
$x<a$ 또는 $x>\frac{3}{2}a$에서
직선 $y=m$과
함수 $y=|(x-a)(x-b)|$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는
2 이상이므로
$\lim_{t\to m+}g(t)\ge 2$이다.
그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(Ⅱ) $a<4<\frac{3}{2}a$, $b<a$인 경우

$\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|=\left|\frac{a}{2}\left(\frac{3}{2}a-4\right)\right|=\frac{a}{2}\left(\frac{3}{2}a-4\right)$

$\lim_{x\to\frac{3}{2}a+}|f(x)|=\left|\frac{a}{2}\left(\frac{3}{2}a-b\right)\right|$
$=\frac{a}{2}\left(\frac{3}{2}a-b\right)$

$b<4$이므로
$\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|<\lim_{x\to\frac{3}{2}a+}|f(x)|$이다.

$\lim_{x\to\frac{3}{2}a+}|f(x)|=k_1$ 이라 하면

$\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|\ge k_1$ 또는

$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|\ge k_1$ 일 때

모든 양의 실수 m 에 대하여

$\lim_{t\to m+}g(t)\ge 2$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|<k_1$ 이고,

$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|<k_1$ 이다.

$\lim_{t\to k_1-}g(t)=1$, $\lim_{t\to k_1+}g(t)=2$ 이므로

함수 $g(t)$ 는 $t=k_1$ 에서 불연속이다.

조건 (나)에 의하여 $\beta=k_1$ 이다.

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여

$b<a<4<\frac{3}{2}a$, $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|<\beta$,

$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|<\beta$, $\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|<\beta$

함수 $g(t)$ 는 $t=\alpha$, $t=\beta$ 에서만 불연속이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|\ne\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$ 인 경우

함수 $g(t)$ 가

$t=\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|$, $t=\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$,

$t=\beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|\ne\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$ 인 경우

함수 $g(t)$ 가

$t=\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$, $t=\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$,

$t=\beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|\ne\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$ 인 경우

함수 $g(t)$ 가

$t=\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|$, $t=\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$,

$t=\beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$ 인 경우

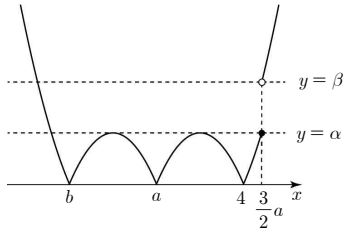
$\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|=k_2$ 라 하면

$\lim_{t\to k_2-}g(t)=6$, $\lim_{t\to k_2+}g(t)=1$ 이므로

함수 $g(t)$ 는 $t=k_2$, $t=\beta$ 에서만 불연속이다.

(ⅰ) ~ (ⅳ)에 의하여 $\alpha=k_2$ 이다.

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{3}{2}a\right)\right|$ 이므로

$\frac{(a-4)^2}{4}=\frac{a(3a-8)}{4}$

$a^2-8a+16=3a^2-8a$, $a^2=8$

$a>0$ 이므로 $a=2\sqrt{2}$

$\left|f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{a+4}{2}\right)\right|$ 이므로

$\frac{(a-b)^2}{4}=\frac{(4-a)^2}{4}$

$b<a<4$ 이므로 $a-b=4-a$

$b=2a-4=4\sqrt{2}-4$

$f(0)=ab=2\sqrt{2}(4\sqrt{2}-4)=16-8\sqrt{2}$

$p=16$, $q=-8$

따라서 $p^2+q^2=256+64=320$

22. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=2^{x-m}+n$,

$g(x)=\log_2(x-n+1)+m-7$ 이라 하자.

점 $A(a,b)$는 제1사분면 위의 점이므로

$0<a<b$

점 B는 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 $B(b,a)$ 이고,

곡선 $y=\log_2(x-n)+m$ 위의 점이다.

곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=\log_2(x-n)+m$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 곡선과 일치한다.

점 B를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 점을 $B'(b-1,a-7)$ 이라 하면

점 B′은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이다.

점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$ 인 원을 C 라 하자.

$\overline{BB'}=5\sqrt{2}$ 이므로

점 B′은 원 C 위의 점이다.

원 C 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 두 점을 $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$ 라 하면 $x_1<x_2$ 이고

함수 $g(x)$ 는 $x>n-1$ 인 실수 전체의 집합에서 증가하므로 $y_1<y_2$

점 B′은 원 C 와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

점 B′은 점 C와 일치하거나 점 D와 일치한다.

점 B′이 점 D와 일치하는 경우

$x_1<b-1$, $y_1<a-7$

$b-x_1>1$, $a-y_1>7$

$\overline{BC}=\sqrt{(b-x_1)^2+(a-y_1)^2}>5\sqrt{2}$ 이므로

점 C가 원 C 위의 점이라는 조건에 모순이다.

그러므로 점 B′은 점 C와 일치한다.

조건 (가)에 의하여

직선 AC의 기울기는

$\frac{a-7-b}{b-1-a}=-3$

$a-7-b=-3(b-1-a)$

$a-b=-5$ … ㉠

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y=-x+a+b$ 이므로

두 점 O, C와 직선 $x+y-a-b=0$ 사이의 거리를 각각 h_1, h_2 라 하면

$h_1=\frac{|-a-b|}{\sqrt{2}}=\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$

$h_2=\frac{|(b-1)+(a-7)-a-b|}{\sqrt{2}}$

$=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_1$ 이고

삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_2$ 이므로

삼각형 AOB와 삼각형 ACB의 넓이의 비는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_1:\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_2=27:8$

$8h_1=27h_2$

$8\times\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}=27\times4\sqrt{2}$

$a+b=27$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=11$, $b=16$

점 A$(11,16)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$2^{11-m}+n=16$

위 식을 만족시키는

두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m,n)은

$(8,8)$, $(9,12)$, $(10,14)$, $(11,15)$이다.

따라서 $m+n$의 최댓값은 $11+15=26$

미적분 정답

23	③	24	②	25	⑤	26	①	27	④
28	①	29	30	30	59				

미적분 해설

23. [출제의도] 지수함수와 삼각함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 6x}{6x}\times 6}{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2}=3$$

24. [출제의도] 합성함수의 미분법 이해하기

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x^3+2x+2)\times(3x^2+2)=-\pi\cos\pi x$ … ㉠

방정식 $x^3+2x+2=5$에서

$(x-1)(x^2+x+3)=0$이므로 $x=1$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f'(5)\times(3\times 1^2+2)=-\pi\cos\pi=\pi$

따라서 $f'(5)=\frac{\pi}{5}$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+n^2}{2n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2}+1}{2+\frac{4}{n^2}}=2$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=3$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{a_n+3n}-\sqrt{a_n+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a_n+3n}-\sqrt{a_n+n}}\times\frac{\sqrt{a_n+3n}+\sqrt{a_n+n}}{\sqrt{a_n+3n}+\sqrt{a_n+n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n+3n}+\sqrt{a_n+n}}{(a_n+3n)-(a_n+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n+3n}+\sqrt{a_n+n}}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{a_n}{n^2}+\frac{3}{n}}+\sqrt{\frac{a_n}{n^2}+\frac{1}{n}}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{3}$$

26. [출제의도] 치환적분법 이해하기

두 점 P, Q의 x좌표를 구하면

$e^x=t$에서 $x=\ln t$

$e^x=t+2$에서 $x=\ln(t+2)$

$f(t)=\ln(t+2)-\ln t$이므로

$$\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{\ln(t+2)-\ln t}{t^2}dt=\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{1}{t^2}\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)dt$$

$1+\frac{2}{t}=u$라 하면 $-\frac{2}{t^2}=\frac{du}{dt}$

$t=\frac{2}{3}$일 때 $u=4$

$t=2$일 때 $u=2$

$$\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{1}{t^2}\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)dt$$

$$=\int_{4}^{2}\left(-\frac{1}{2}\ln u\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2}^{4}\ln u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\Big[u\ln u-u\Big]_2^4$$

$$=\frac{1}{2}\{(4\ln 4-4)-(2\ln 2-2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(8\ln 2-4)-(2\ln 2-2)\}$$

$$=\frac{1}{2}(6\ln 2-2)=3\ln 2-1$$

따라서 $\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{f(t)}{t^2}dt=-1+3\ln 2$

27. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$x=\cos t+t\sin t$에서 $\frac{dx}{dt}=t\cos t$

$y=\sin t-t\cos t$에서 $\frac{dy}{dt}=t\sin t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t$$

$t=k$일 때,

곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $\tan k$이므로 곡선 위의 점 P에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기는 k이다.

직선 $y=\frac{1}{2}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 α라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$

$|\tan(k-\alpha)|=\tan\theta=\frac{1}{2}$에서

$$|\tan(k-\alpha)|=\left|\frac{\tan k-\tan\alpha}{1+\tan k\times\tan\alpha}\right|$$

$$=\left|\frac{\tan k-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\times\tan k}\right|=\frac{1}{2}$$이므로

$\tan k=0$ 또는 $\tan k=\frac{4}{3}$

$0<k<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan k=\frac{4}{3}$

$\sin k=\frac{4}{5}$, $\cos k=\frac{3}{5}$

$a=\cos k+k\sin k=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}k$

$b=\sin k-k\cos k=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}k$

따라서

$$3a+4b+\tan k=\frac{9}{5}+\frac{12}{5}k+\frac{16}{5}-\frac{12}{5}k+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{19}{3}$$

28. [출제의도] 부분적분법을 활용하여 문제 해결하기

$$\int_1^{e^x}f^{-1}(g(t))dt=(x-1)e^x+k\ \cdots\ ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-1+k$, $k=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f^{-1}(g(e^x))\times e^x=xe^x$이고

$e^x>0$이므로 $f^{-1}(g(e^x))=x$

그러므로 $g(e^x)=f(x)$

$g^{-1}(f(x))=e^x$

$f^{-1}(x)=u$라 하면

$x=f(u)$이고 $1=f'(u)\frac{du}{dx}$

$x=f(0)$일 때 $u=0$,

$x=f(k)=f(1)$일 때 $u=1$

$$\int_{f(0)}^{f(k)}(f^{-1}(x)+g^{-1}(x))dx$$

$$=\int_0^1\{u+g^{-1}(f(u))\}f'(u)\,du$$

$$=\int_0^1(u+e^u)f'(u)\,du$$

$$=\Big[(u+e^u)f(u)\Big]_0^1-\int_0^1(1+e^u)f(u)\,du$$

$$=\Big[(u+e^u)f(u)\Big]_0^1-\int_0^1(1+e^u)\left(u-\frac{1}{e^u+1}\right)du$$

$$=\left\{(1+e)\times\left(1-\frac{1}{e+1}\right)-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}-\int_0^1(u+ue^u-1)\,du$$

$$=\left(e+\frac{1}{2}\right)-\int_0^1(u-1)\,du-\int_0^1ue^u\,du$$

$$=e+\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}u^2-u\right]_0^1-\left(\Big[ue^u\Big]_0^1-\int_0^1e^u\,du\right)$$

$$=e+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-1\right)-\{(e-0)-(e-1)\}$$

$$=e$$

따라서 $\int_{f(0)}^{f(k)}(f^{-1}(x)+g^{-1}(x))dx=e$

29. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a,

공비를 r이라 하면

$a_n=a\times r^{n-1}$(단, n은 자연수)

조건 (가)에 의하여 $a\neq 0$, $r\neq 0$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$-1<r<0$ 또는 $0<r<1$

(i) $0<r<1$인 경우

① $a<0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이므로 $b_n=-a_n$ … ㉡

조건 (나)에서

$$\left(\frac{-a}{1-r}\right)^2=2\times\frac{a^2}{1-r^2}$$

$2(1-r)^2=1-r^2$

$2(1-r)=1+r$이므로

$r=\frac{1}{3}$

㉠에 의하여

모든 자연수 n에 대하여 $a_n+b_n=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=63$을 만족시키지 않는다.

② $a>0$이면 모든 자연수 n에 대하여

$a_n>a_{n+1}$이므로 $b_n=a_{2n}>0$

$a_nb_n=a_na_{2n}>0$이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $-1<r<0$인 경우

① $a<0$이면 모든 자연수 n에 대하여

$n=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$a_{2m-1}<0<a_{2m}$이므로

$b_{2m-1}=-a_{2m-1}$

$a_nb_n=-a_{2m-1}a_{2m-1}=-(a_{2m-1})^2<0$

$n=2m$ (m은 자연수)일 때,

$a_{2m+1}<0<a_{2m}$이므로

$b_{2m}=a_{4m}>0$

$a_nb_n=a_{2m}a_{4m}>0$이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a>0$이면 모든 자연수 n에 대하여

$n=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$a_{2m}<0<a_{2m-1}$이므로

$b_{2m-1}=a_{4m-2}<0$

$a_nb_n=a_{2m-1}a_{4m-2}<0$

$n=2m$ (m은 자연수)일 때,

$a_{2m}<0<a_{2m+1}$이므로

$b_{2m}=-a_{2m}$

$a_nb_n=-a_{2m}a_{2m}=-(a_{2m})^2<0$이므로

조건 (가)를 만족시킨다.

조건 (나)에서

$\left(\frac{a}{1+r}\right)^2=2\times\frac{a^2}{1-r^2}$

$2(1+r)^2=1-r^2$

$2(1+r)=1-r$이므로

$r=-\frac{1}{3}$

$$a_n+b_n=\begin{cases}a_n+a_{2n} & (n=2m-1)\\ 0 & (n=2m)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{4n-2})$$
$$=\frac{a}{1-r^2}+\frac{ar}{1-r^4}$$
$$=\frac{63}{80}a=63$$

그러므로 $a=80$

(i), (ii)에 의하여

$a_n=80\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$b_{2n}=-a_{2n}=\frac{80}{3}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{\frac{80}{3}}{1-\frac{1}{9}}=30$

30. [출제의도] 함수의 그래프 추론하기

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$ 또는

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$

$(f(x))^3+f(x)=\frac{a}{x^2+12}-bx-\frac{16}{3}b$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\{3(f(x))^2+1\}f'(x)=\frac{-2ax}{(x^2+12)^2}-b$

양변에 $x=0$을 대입하면

$\{3(f(0))^2+1\}f'(0)=-b$

$3(f(0))^2+1>0$이고 $b>0$이므로 $f'(0)<0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\le 0$ … ㉠

$g(x)=\frac{-2ax}{(x^2+12)^2}-b$라 하면

$g(x)=\{3(f(x))^2+1\}f'(x)$이고

㉠에 의하여 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le 0$

조건 (나)에 의하여

$g(k)=\{3(f(k))^2+1\}f'(k)=0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=k$에서 최댓값 0을 갖는다.

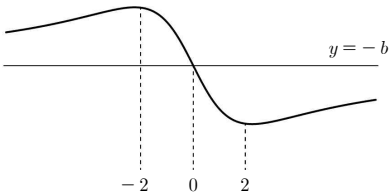
$g'(x)=\frac{6a(x+2)(x-2)}{(x^2+12)^3}$

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-b$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=-b$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-2	…	2	…
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	$\frac{a}{64}-b$	↘	$-\frac{a}{64}-b$	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 최댓값은

$x=-2$일 때뿐이므로 $k=-2$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-bx$가 만나는 서로 다른 모든 점의 x좌표의 합은

$k+8=6$이다.

$f'(-2)=0$이므로 $g(-2)=\frac{a}{64}-b=0$에서

$a=64b$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-bx$가 만나는 점의 x좌표를 t라 하면

$(f(t))^3+f(t)=\frac{64b}{t^2+12}-bt-\frac{16}{3}b$이고

$f(t)=-bt$이므로

$(-bt)^3-bt=\frac{64b}{t^2+12}-bt-\frac{16}{3}b$

$0=b^3t^3+\frac{64b}{t^2+12}-\frac{16}{3}b$

$0=b^2t^3+\frac{64}{t^2+12}-\frac{16}{3}$

$0=\frac{3b^2t^3(t^2+12)+192-16(t^2+12)}{3(t^2+12)}$

$0=\frac{t^2(3b^2t^3+36b^2t-16)}{3(t^2+12)}$

그러므로 방정식 $f(t)=-bt$의 한 실근은 $t=0$

$h(t)=3b^2t^3+36b^2t-16$이라 하면

$h'(t)=9b^2t^2+36b^2$

모든 실수 t에 대하여 $h'(t)>0$이므로

삼차함수 $h(t)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

방정식 $h(t)=0$의 실근의 개수는 1이고

그 실근을 $t=t_1$ ($t_1\ne 0$)이라 하자.

방정식 $f(t)=-bt$는 서로 다른 두 실근을 갖고

두 실근은 $t=0$과 $t=t_1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-bx$가 만나는 서로 다른 모든 점의 x좌표의 합은

$0+t_1=6$이므로 $t_1=6$

$h(6)=648b^2+216b^2-16=0$

$b^2=\frac{1}{54}$이므로

$a\times b=64b\times b=64\times b^2=\frac{32}{27}$

$p=27$, $q=32$

따라서 $p+q=59$