• 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정 답

1	③	2	⑤	3	①	4	②	5	⑤
6	④	7	④	8	①	9	③	10	②
11	⑤	12	①	13	⑤	14	②	15	③
16	30	17	15	18	124	19	14	20	67
21	48	22	80						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$4^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2^1=2$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=4x+1$ 이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4+1=5$

3. [출제의도] 등차수열을 이해하여 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$2a_2+a_7=2(2+d)+(2+6d)=6+8d=30$

$d=3$

$a_{10}=2+9d=2+9\times 3=29$

4. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax^2-2)=4a-2$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)=6$

$4a-2=6,\ a=2$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=(x+1)'(2x^2-5x+1)+(x+1)(2x^2-5x+1)'$

$=1\times(2x^2-5x+1)+(x+1)(4x-5)$

이므로

$f'(2)=-1+9=8$

6. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 주어진 값을 구한다.

a가 양수이므로

$\log_3 a^2=2\log_3 a=4,\ \log_3 a=2,\ a=3^2$

$a=9$

$\log_9 ab=\log_9 9b=1+\log_9 b=\frac{5}{2},\ \log_9 b=\frac{3}{2},\ b=9^{\frac{3}{2}}$

$b=27$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{27}{9}=3$

7. [출제의도] 정적분을 이해하여 직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$0\le x\le 2$에서 $x^2\ge x-2$이므로 구하는 부분의 넓이는

$\int_0^2\{x^2-(x-2)\}dx=\int_0^2(x^2-x+2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}-2+4=\frac{14}{3}$

8. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{\cos\theta}{4}\right)^2+\cos^2\theta=\frac{17}{16}\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{16}{17}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\frac{4\sqrt{17}}{17}$

9. [출제의도] 함수의 극값을 이해하여 함수의 최댓값을 구한다.

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(2)=16-12-24+a=-20+a=4$

$a=24$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+24$이므로

$f(1)=2-3-12+24=11$

$f(3)=54-27-36+24=15$

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 15이므로

$M=15$

10. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$y=\log_2(x-k)$에 $y=0$을 대입하면 $0=\log_2(x-k)$

$2^0=1=x-k,\ x=k+1$

이므로 A$(k+1, 0)$

점 B의 x좌표를 t라 하면 점 B의 y좌표는 2이므로

$\log_2(t-k)=2,\ 2^2=t-k,\ t=k+4$

이므로 B$(k+4, 2)$

점 C는 직선 $y=2$가 y축과 만나는 점이므로 C$(0, 2)$

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

선분 BC의 중점을 M이라 할 때

$\overline{AM}\perp\overline{BC}$이고 점 M의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같다.

M$\left(\frac{k+4}{2}, 2\right)$이므로

$\frac{k+4}{2}=k+1,\ k+4=2k+2,\ k=2$

그러므로 A$(3, 0)$, B$(6, 2)$, C$(0, 2)$, M$(3, 2)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AM}=\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$

11. [출제의도] 정적분을 이해하여 점의 위치와 움직인 거리를 구한다.

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는

$0+\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1(3t^2-24t+36)\,dt$

$=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^1=25$ (참)

ㄴ. $v(t)=3(t^2-8t+12)=3(t-2)(t-6)$

시각 $t=2$, $t=6$일 때 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다. (참)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^3|v(t)|\,dt=\int_0^3|3t^2-24t+36|\,dt$

$=\int_0^2(3t^2-24t+36)\,dt+\int_2^3\{-(3t^2-24t+36)\}\,dt$

$=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^2+\left[-t^3+12t^2-36t\right]_2^3$

$=(32-0)+\{-27-(-32)\}=37$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12. [출제의도] 등비수열을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$n=1$일 때, $\frac{a_1}{b_1+1}=2$에서 $b_1=\frac{1}{2}$이다.

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{a_n}{b_n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}$이므로

$=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$\frac{a_n}{b_n+1}=\boxed{2}\times n$ …… ㉠

이다.

$n=1$일 때도 ㉠이 성립하므로

모든 자연수 n에 대하여

$\frac{a_n}{n}=\boxed{2}\times(b_n+1)$ …… ㉡

이다.

$n=2$일 때, $\frac{a_2}{2}=2\times(b_2+1)$에서 $b_2=\frac{3}{2}$이다.

그러므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\boxed{3}$이다.

따라서 ㉡에 의하여

$\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}=2\times\sum_{n=1}^{5}(b_n+1)=2\times\left(\sum_{n=1}^{5}b_n+\sum_{n=1}^{5}1\right)$

$=2\times\left\{\frac{\frac{1}{2}(3^5-1)}{3-1}+5\right\}=2\times\left(\frac{121}{2}+5\right)=\boxed{131}$이다.

$p=2,\ q=3,\ r=131$이므로 $p+q+r=136$

13. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2-8x+6$이므로

점 P$(1, -5)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=x-6$

점 Q의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면

$f(t)=t-6$

$t^3-4t^2+5t-2=0,\ (t-1)^2(t-2)=0$

점 Q는 점 P가 아닌 점이므로 $t=2$이다.

점 Q$(2, -4)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=2x-8$

이 직선의 x절편은 4, y절편은 -8이므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times|-8|=16$

14. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 함수를 추론한다.

실수 k에 대하여

(i) $k=0$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해는 $x=0$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 0 또는 $\frac{7}{4}\pi$로 2개다.

(ii) $0<k<3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해의 합은 π

① $\pi\le x\le 2\pi$에서 방정식 $a\cos x+b=k$의 해가 존재하면 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 2π 이상이다.

② $\pi\le x\le 2\pi$에서 방정식 $a\cos x+b=k$의 해가 존재하지 않으면 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 π이다.

그러므로 조건을 만족시키는 실수 t는 존재하지 않는다.

(iii) $k=3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해는 $x=\frac{\pi}{2}$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는

모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 $\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi$로 2개다.

(iv) $k<0$ 또는 $k>3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해가 존재하지 않으므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=k$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 $\frac{7}{4}\pi$로 1개다.

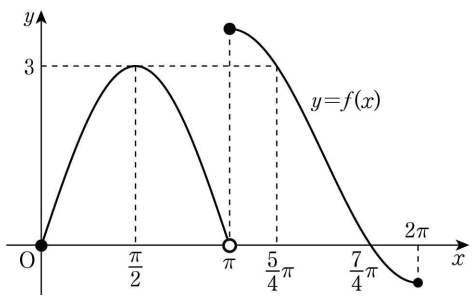
(ⅰ)~(iv)에서 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$이고 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$인 경우에만 조건을 만족시킨다.

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=a\cos\frac{5}{4}\pi+b=-\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=3 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=a\cos\frac{7}{4}\pi+b=\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=0 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서 $a^2+b^2=\frac{9}{2}+\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$



15. [출제의도] 도함수를 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}\left(-xf(x)-ax^2\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{4}f(x)-bx^2\right)=\frac{1}{4}f(0)$$

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)$에서

$f(0)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{-hf(h)-ah^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\left(-f(h)-ah\right)$$
$$=-f(0)=0$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{1}{4}f(h)-bh^2}{h}$$
$$=\frac{1}{4}f'(0)$$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$에서

$f'(0)=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $f(x)=x^3+px^2$을 만족시키는 실수 p가 존재한다.

$g_1(x)=-xf(x)-ax^2=-x^4-px^3-ax^2$,

$g_2(x)=\frac{1}{4}f(x)-bx^2=\frac{1}{4}x^3+\left(\frac{p}{4}-b\right)x^2$

이라 하자.

$x\le 0$에서 $\lim_{x\to -\infty}g(x)=-\infty$이고 $g(0)=0$이므로

$g(\alpha)=-27$을 만족시키는 실수 α가 구간 $(-\infty,0)$에 적어도 하나 존재한다.

$g_1'(x)=-x(4x^2+3px+2a)$이고 조건 (나)에서

$g'(\alpha)=0$이므로 실수 β가 존재하여

α, β는 이차방정식 $4x^2+3px+2a=0$의 근이다.

(ⅰ) $\beta<\alpha<0$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty,\beta)$에서 증가하고 구간 (β,α)에서 감소하므로 $g(k)=-27$이지만 $g'(k)\ne 0$인 실수 k가 구간 $(-\infty,\beta)$에 존재하여 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\alpha<\beta<0$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 (α,β)에서 감소하고 구간 $(\beta,0)$에서 증가하며 $g(0)=0$이므로 $g(k)=-27$이지만 $g'(k)\ne 0$인 실수 k가 구간 $(\beta,0)$에 존재하여 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\alpha<0\le\beta$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 $(\alpha,0)$에서 감소하므로 $g(\alpha)=-27$이고 $g(0)=0$인 것에 모순이다.

(ⅰ)~(iii)에서 조건을 만족시키기 위해서는 $\beta=\alpha$이어야 한다.

이차방정식 $4x^2+3px+2a=0$의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$2\alpha=-\frac{3}{4}p,\ \alpha^2=\frac{a}{2}$$

$$p=-\frac{8}{3}\alpha,\ a=2\alpha^2$$

$$g(\alpha)=-\alpha^4+\frac{8}{3}\alpha^4-2\alpha^4=-\frac{1}{3}\alpha^4=-27$$

$\alpha^4=81$, $\alpha=3$ 또는 $\alpha=-3$

$\alpha<0$이므로 $\alpha=-3$이고 $p=8$, $a=18$

$x\le 0$에서 $g(x)=-27$을 만족시키는 x의 값은 α뿐이므로 조건 (가)에 의하여 $\gamma>0$인 실수 γ가 존재하여 $g(\gamma)=-27$, $g'(\gamma)=0$을 만족시킨다.

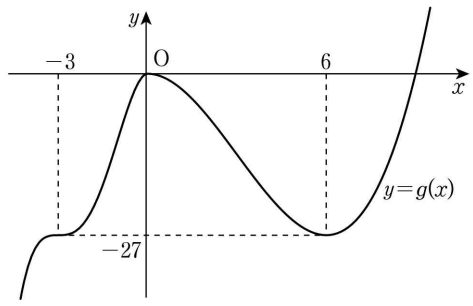
$g_2'(x)=\frac{3}{4}x^2+(4-2b)x=0$에서

$$\gamma=\frac{8}{3}(b-2)$$

$$g(\gamma)=g\left(\frac{8}{3}(b-2)\right)=-\frac{64}{27}(b-2)^3=-27$$

$$b-2=\frac{9}{4},\ b=\frac{17}{4}$$

따라서 $a+b=18+\frac{17}{4}=\frac{89}{4}$



16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 항을 구한다.

$n=1$일 때, $a_2=a_1^2-3\times 1=3^2-3=6$

$n=2$일 때, $a_3=a_2^2-3\times 2=6^2-6=30$

따라서 $a_3=30$

17. [출제의도] 부정적분을 이용하여 함숫값을 계산한다.

$$F(x)=\int(4x^3-3x^2+2)\,dx$$
$$=x^4-x^3+2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$F(1)=2+C=5$이므로 $C=3$이다.

따라서 $F(2)=12+C=15$

18. [출제의도] 코사인법칙을 이해하여 변의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$$
$$=6^2+8^2-2\times 6\times 8\times\left(-\frac{1}{4}\right)=124$$

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2-12x+a$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 $f'(1)=0$

$a=9$

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 5를 가지므로

$f(3)=27-54+27+b=5$에서

$b=5$

따라서 $a+b=9+5=14$

20. [출제의도] 수열의 성질을 이용하여 수열의 합에 대한 문제를 해결한다.

자연수 t에 대하여

$$a_{5t-4}+a_{5t-3}+a_{5t-2}+a_{5t-1}+a_{5t}$$
$$=(5t-4)+(5t-3)+(5t-2)+(5t-1)+\{(-4)\times 5t+10\}$$
$$=20t-10+(-20t+10)=0$$

$$\sum_{k=1}^{5t}a_k=\sum_{k=1}^{t}\left(a_{5k-4}+a_{5k-3}+a_{5k-2}+a_{5k-1}+a_{5k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{t}0=0$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\begin{cases}5t-4 & (m=5t-4)\\ 10t-7 & (m=5t-3)\\ 15t-9 & (m=5t-2)\\ 20t-10 & (m=5t-1)\\ 0 & (m=5t)\end{cases}$$

(ⅰ) $m=5t-4$이면 $20\le 5t-4<30$에서 $t=5$, 6이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 21, 26이다.

(ⅱ) $m=5t-3$이면 $20\le 10t-7<30$에서 $t=3$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 12이다.

(iii) $m=5t-2$이면 $20\le 15t-9<30$에서 $t=2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 8이다.

(iv) $m=5t-1$이면 $20\le 20t-10<30$에서 $\frac{3}{2}\le t<2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(iv)에서 모든 자연수 m의 값의 합은

$21+26+12+8=67$

21. [출제의도] 정적분을 이용하여 함수를 추론한다.

$g(x)=\int_0^x(f(t)-|f(t)|)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f(x)-|f(x)|$이므로

$$g'(x)=\begin{cases}2f(x) & (f(x)<0)\\ 0 & (f(x)\ge 0)\end{cases}$$

조건 (가)에서 $x\ge 2$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고 충분히 작은 양수 h에 대하여 열린구간 $(2-h,2)$에서 $f(x)<0$이다.

삼차함수 $f(x)$의 부호가 $x=2$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌어야 하므로 $f(2)=0$이다.

$f(x)$는 최고차항이 1인 삼차함수이고

$f(0)=0$, $f(2)=0$이며 $x\ge 2$에서 $f(x)\ge 0$이므로

$f(x)=x(x-2)(x-a)$를 만족시키는 실수 $a\,(a<2)$가 존재한다.

(ⅰ) $0<a<2$인 경우

$0<x\le a$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고

$a<x<2$인 모든 x에 대하여 $f(x)<0$이므로

$$g(2)=\int_0^2(f(t)-|f(t)|)\,dt$$
$$=\int_0^a 0\,dt+\int_a^2 2f(t)\,dt$$

$$= \int_a^2 2t(t-2)(t-a)\,dt$$

$$= \int_a^2 \{2t^3-(2a+4)t^2+4at\}dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2a+4}{3}t^3+2at^2\right]_a^2$$

$$= \frac{1}{6}a^4-\frac{2}{3}a^3+\frac{8}{3}a-\frac{8}{3}$$

$h(x)=\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{3}x-\frac{8}{3}$ 이라 하면

$h'(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}(x+1)(x-2)^2$

$0<x<2$ 에서 $h'(x)>0$ 이고 $h(0)=-\frac{8}{3}$ 이므로

$0<a<2$ 인 모든 a 에 대하여 $h(a)>-\frac{8}{3}$ 이다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a\le 0$ 인 경우

$0<x<2$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x)<0$ 이고

조건 (나)에서 $g(2)=-8$ 이므로

$$g(2)=\int_0^2 (f(t)-|f(t)|)\,dt=\int_0^2 2f(t)\,dt$$

$$= \int_0^2 2t(t-2)(t-a)\,dt$$

$$= \int_0^2 \{2t^3-(2a+4)t^2+4at\}dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2a+4}{3}t^3+2at^2\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}a-\frac{8}{3}=-8$$

에서 $a=-2$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x(x-2)(x+2)$

따라서 $f(4)=4\times 2\times 6=48$

22. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 두 점 사이의 거리에 관한 문제를 해결한다.

직선 $x=t$ 가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 만나는 두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$ 이 되도록 하는 실수 t 의 값을 a, $b\,(a\ne b)$라 하자.

$h(x)=g(x)-f(x)$ 라 하면

a, b는 방정식 $|h(x)|=\frac{1}{5}$의 근이다.

$$h(x)=2\times 4^x-2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$=2\times\left(2^x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{8}>-\frac{1}{5}$$

이므로 a, b는 방정식 $h(x)=\frac{1}{5}$ 의 근이다.

$2\times 4^x-2^x+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}=0$ 에서 $2^x=X\,(X>0)$이라 하면

2^a, 2^b은 X에 대한 이차방정식

$2X^2-X+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}=0$

의 근이다.

이차방정식 $2X^2-X+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4\times 2\times\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}\right)=\frac{13}{5}-\frac{8}{2^k}>0$

$\frac{8}{2^k}<\frac{13}{5}$

$\frac{40}{13}<2^k$ …… ㉠

한편, $X>0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$2^a\times 2^b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}\right)>0$, $\frac{1}{2^k}>\frac{1}{5}$

$2^k<5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 자연수 k의 값은 2이다.

$2^p=2^{a+b}=2^a\times 2^b$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{40}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^p=\frac{1}{2^p}=40$

따라서 $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p=2\times 40=80$

[확률과 통계]

23	②	*24*	④	*25*	①	*26*	③	*27*	⑤
28	③	*29*	864	*30*	100				

23. [출제의도] 중복조합의 수를 계산한다.

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

24. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

서로 다른 종류의 연필 4자루를 세 명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

25. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 4가 되려면 2가 적힌 카드가 양 끝에 있거나,

1, 3이 적힌 카드가 양 끝에 한 장씩 있어야 한다.

(i) 2가 적힌 카드가 양 끝에 있는 경우

2, □, □, □, □, □, 2

에서 □에 1, 1, 1, 3, 3을 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!}=10$

(ii) 1, 3이 적힌 카드가 양 끝에 한 장씩 있는 경우

△, □, □, □, □, □, △

에서 △에 1, 3을 나열하는 경우의 수는 2

□에 1, 1, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!1!}=30$

구하는 경우의 수는 $2\times 30=60$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $10+60=70$

26. [출제의도] 중복조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

(i) $d=0$ 인 경우

$a+b+c=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

(ii) $d\ge 1$ 인 경우

$a+b+c+(d-1)=4$에서 $d'=d-1$이라 하자.

$a+b+c+d'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d'의 모든 순서쌍 (a, b, c, d')의 개수는

${}_4\mathrm{H}_4={}_{4+4-1}\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$10+35=45$

27. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

(i) $n(A\cap B)=2$ 인 경우

집합 $\{-4, 4\}$, $\{-2, 2\}$, $\{-1, 1\}$ 중 한 개가 집합 $A\cap B$의 부분집합이므로 집합 $A\cap B$를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

남은 4개의 원소는 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중 하나의 원소이므로 이 세 집합을 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

구하는 순서쌍의 개수는 $3\times 81=243$

(ii) $n(A\cap B)=4$ 인 경우

집합 $\{-4, 4\}$, $\{-2, 2\}$, $\{-1, 1\}$ 중 두 개가 집합 $A\cap B$의 부분집합이므로 집합 $A\cap B$를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

남은 2개의 원소는 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중 하나의 원소이므로 이 세 집합을 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$

구하는 순서쌍의 개수는 $3\times 9=27$

(iii) $n(A\cap B)=6$ 인 경우

$A\cap B=U$이므로 구하는 순서쌍의 개수는 1

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는 $243+27+1=271$

28. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 함수의 개수를 추론한다.

조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, …, $f(9)$의 값을 정하는 경우의 수는

1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{9!}{4!3!2!}=1260$

조건 (나)를 만족시키지 못하는 경우는

$(f(x), f(x+1), f(x+2))$가 (1, 1, 2) 또는 (2, 2, 4)인 $x\in X$가 존재하는 경우이다.

(i) (1, 1, 2)인 $x\in X$가 존재하는 경우

1, 1, 2를 하나의 문자 a로 보고

a, 1, 2, 4, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{4!1!1!1!}=210$

(ii) (2, 2, 4)인 $x\in X$가 존재하는 경우

2, 2, 4를 하나의 문자 a로 보고

a, 1, 1, 1, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!3!1!}=140$

(iii) (1, 1, 2)인 $x\in X$와 (2, 2, 4)인 $y\in X$가 존재하는 경우

1, 1, 2, 2, 4를 하나의 문자 a로 보고

a, 1, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!1!1!}=20$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키지 못하는 경우의 수는 $210+140-20=330$

따라서 구하는 경우의 수는 $1260-330=930$

29. [출제의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

흰색 접시를 배열하는 원순열의 수는

$(5-1)!=24$

조건 (가)에서 각각의 흰색 접시 사이에 검은색 접시가 한 개씩 있다.

조건 (나)에서 8, 10이 적힌 검은색 접시는 9가 적힌 흰색 접시와 이웃하지 않으므로, 8, 10이 적힌 두 검은색 접시를 놓는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=6$

남은 세 자리에 2, 4, 6이 적힌 검은색 접시를 놓는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_3=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times 6\times 6=864$

30. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

$a_n=1$ 또는 $a_n=-1$이다. $\sum_{n=1}^{11} a_n=3$이므로

$a_n=1$인 n이 7개, $a_n=-1$인 n이 4개 존재한다.

▲□△□△□△□△□△□▲에서

6개의 □에 1이 적힌 카드를 한 장씩 놓고

△와 ▲에 -1이 적힌 카드를 놓는다고 하자.

△에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장 놓으면

$a_n=-1$인 자연수 n이 2개 나오고,

▲에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장 놓으면

$a_n=-1$인 자연수 n이 1개 나온다.

$a_n=-1$인 n이 4개 존재하려면

두 개의 △에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장씩 놓거나

한 개의 △와 두 개의 ▲에 -1이 적힌 카드를

적어도 한 장씩 놓아야 한다.

(ⅰ) 두 개의 △에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장씩 놓는 경우

두 개의 △를 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

두 개의 △에 카드를 놓는 경우의 수는

$x_1+x_2=6\,(x_1\ge1,\ x_2\ge1)$을 만족시키는 정수 $x_1,\ x_2$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2)$의 개수와 같다.

$x_1'=x_1-1,\ x_2'=x_2-1$이라 하면

$x_1'+x_2'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1',\ x_2'$의 모든 순서쌍 $(x_1',\ x_2')$의 개수는

${}_2\mathrm{H}_4={}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

구하는 경우의 수는 $10\times5=50$

(ⅱ) 한 개의 △와 두 개의 ▲에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장씩 놓는 경우

한 개의 △를 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1=5$

한 개의 △와 두 개의 ▲에 카드를 놓는 경우의 수는 $x_1+x_2+x_3=6\,(x_1\ge1,\ x_2\ge1,\ x_3\ge1)$을 만족시키는 정수 $x_1,\ x_2,\ x_3$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수와 같다.

$x_1'=x_1-1,\ x_2'=x_2-1,\ x_3'=x_3-1$이라 하면

$x_1'+x_2'+x_3'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1',\ x_2',\ x_3'$의 모든 순서쌍 $(x_1',\ x_2',\ x_3')$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

구하는 경우의 수는 $5\times10=50$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$50+50=100$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{a}\right)^n=1$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=\dfrac{9}{2}$

이므로 $a=2$는 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $a=1$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+2^{n+1}}{1+2^n}=2$

$2=1+1$이므로 $a=1$은 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a=1$ 또는 $a=4$이므로 조건을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은 5

27. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은

$y=a_nx$

모든 자연수 n에 대하여 점 $(2n-1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n인 원을 C_n이라 하자.

직선 $y=a_nx$가 원 C_n과 서로 다른 두 점에서 만나므로 점 $(2n-1,\ 0)$과 직선 $y=a_nx$ 사이의 거리는 n보다 작다.

$\dfrac{a_n(2n-1)}{\sqrt{a_n^2+1}}<n,\ \dfrac{1}{a_n^2}>\dfrac{3n^2-4n+1}{n^2}$ …… ㉠

직선 $y=a_nx$가 원 C_{n+1}과 만나지 않으므로 점 $(2n+1,\ 0)$과 직선 $y=a_nx$ 사이의 거리는 $n+1$보다 크다.

$\dfrac{a_n(2n+1)}{\sqrt{a_n^2+1}}>n+1,\ \dfrac{1}{a_n^2}<\dfrac{3n^2+2n}{n^2+2n+1}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{3n^2-4n+1}{n^2}<\dfrac{1}{a_n^2}<\dfrac{3n^2+2n}{n^2+2n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n}{n^2+2n+1}=3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n^2}=3$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+2^{n+1}\left(\dfrac{a}{2}\right)^n}{1+2^n\left(\dfrac{a}{2}\right)^n}$

$=\begin{cases}5 & (a>2)\\ \dfrac{9}{2} & (a=2)\\ 2 & (a<2)\end{cases}$

(ⅰ) $a>2$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=5$이므로 $a=\sqrt{3}$

(ⅱ) $a=2$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=\dfrac{9}{2}$이므로 $a=2$

(ⅲ) $a<2$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=2$이므로 $a=1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=\sqrt{3}$

따라서 모든 a의 값의 곱은 $\sqrt{3}$

28. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 함수의 연속을 추론한다.

(ⅰ) $|f(x)|>5$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}=1$이므로

$h(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x)+g(x)\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}}{1+\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}}=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}$

(ⅱ) $|f(x)|=5$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}=1$이므로

$h(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x)+g(x)\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}}{1+\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}}=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}$

(ⅲ) $|f(x)|<5$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{5}\right)^{2n}=0$이므로

$h(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x)\left(\dfrac{f(x)}{5}\right)^{2n}+g(x)}{\left(\dfrac{f(x)}{5}\right)^{2n}+1}=g(x)$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (|f(x)|>5)\\ \dfrac{f(x)+g(x)}{2} & (|f(x)|=5)\\ g(x) & (|f(x)|<5)\end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$h(-2)=\lim\limits_{x\to-2}h(x)$이다. $|f(-2)|=5$이므로

$h(-2)=\lim\limits_{x\to-2-}h(x)=\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$

$h(-2)=\lim\limits_{x\to-2+}h(x)=\lim\limits_{x\to-2+}g(x)=g(-2)$

즉 $f(-2)=g(-2),\ -5=2p-q+5,\ q=2p+10$

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

