• 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정 답

1	③	2	⑤	3	①	4	②	5	⑤
6	④	7	④	8	①	9	③	10	②
11	⑤	12	①	13	⑤	14	②	15	③
16	30	17	15	18	124	19	14	20	67
21	48	22	80						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$4^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2^1=2$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=4x+1$ 이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4+1=5$

3. [출제의도] 등차수열을 이해하여 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$2a_2+a_7=2(2+d)+(2+6d)=6+8d=30$

$d=3$

$a_{10}=2+9d=2+9\times 3=29$

4. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax^2-2)=4a-2$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)=6$

$4a-2=6,\ a=2$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=(x+1)'(2x^2-5x+1)+(x+1)(2x^2-5x+1)'$

$=1\times(2x^2-5x+1)+(x+1)(4x-5)$

이므로

$f'(2)=-1+9=8$

6. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 주어진 값을 구한다.

a가 양수이므로

$\log_3 a^2=2\log_3 a=4,\ \log_3 a=2,\ a=3^2$

$a=9$

$\log_9 ab=\log_9 9b=1+\log_9 b=\frac{5}{2},\ \log_9 b=\frac{3}{2},\ b=9^{\frac{3}{2}}$

$b=27$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{27}{9}=3$

7. [출제의도] 정적분을 이해하여 직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$0\le x\le 2$에서 $x^2\ge x-2$이므로 구하는 부분의 넓이는

$\int_0^2\{x^2-(x-2)\}dx=\int_0^2(x^2-x+2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}-2+4=\frac{14}{3}$

8. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{\cos\theta}{4}\right)^2+\cos^2\theta=\frac{17}{16}\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{16}{17}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\frac{4\sqrt{17}}{17}$

9. [출제의도] 함수의 극값을 이해하여 함수의 최댓값을 구한다.

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(2)=16-12-24+a=-20+a=4$

$a=24$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+24$이므로

$f(1)=2-3-12+24=11$

$f(3)=54-27-36+24=15$

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 15이므로

$M=15$

10. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$y=\log_2(x-k)$에 $y=0$을 대입하면 $0=\log_2(x-k)$

$2^0=1=x-k,\ x=k+1$

이므로 A$(k+1, 0)$

점 B의 x좌표를 t라 하면 점 B의 y좌표는 2이므로

$\log_2(t-k)=2,\ 2^2=t-k,\ t=k+4$

이므로 B$(k+4, 2)$

점 C는 직선 $y=2$가 y축과 만나는 점이므로 C$(0, 2)$

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

선분 BC의 중점을 M이라 할 때

$\overline{AM}\perp\overline{BC}$이고 점 M의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같다.

M$\left(\frac{k+4}{2}, 2\right)$이므로

$\frac{k+4}{2}=k+1,\ k+4=2k+2,\ k=2$

그러므로 A$(3, 0)$, B$(6, 2)$, C$(0, 2)$, M$(3, 2)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AM}=\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$

11. [출제의도] 정적분을 이해하여 점의 위치와 움직인 거리를 구한다.

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는

$0+\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1(3t^2-24t+36)\,dt$

$=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^1=25$ (참)

ㄴ. $v(t)=3(t^2-8t+12)=3(t-2)(t-6)$

시각 $t=2$, $t=6$일 때 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다. (참)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^3|v(t)|\,dt=\int_0^3|3t^2-24t+36|\,dt$

$=\int_0^2(3t^2-24t+36)\,dt+\int_2^3\{-(3t^2-24t+36)\}\,dt$

$=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^2+\left[-t^3+12t^2-36t\right]_2^3$

$=(32-0)+\{-27-(-32)\}=37$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12. [출제의도] 등비수열을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$n=1$일 때, $\frac{a_1}{b_1+1}=2$에서 $b_1=\frac{1}{2}$이다.

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{a_n}{b_n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}$이므로

$=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$\frac{a_n}{b_n+1}=\boxed{2}\times n$ …… ㉠

이다.

$n=1$일 때도 ㉠이 성립하므로

모든 자연수 n에 대하여

$\frac{a_n}{n}=\boxed{2}\times(b_n+1)$ …… ㉡

이다.

$n=2$일 때, $\frac{a_2}{2}=2\times(b_2+1)$에서 $b_2=\frac{3}{2}$이다.

그러므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\boxed{3}$이다.

따라서 ㉡에 의하여

$\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}=2\times\sum_{n=1}^{5}(b_n+1)=2\times\left(\sum_{n=1}^{5}b_n+\sum_{n=1}^{5}1\right)$

$=2\times\left\{\frac{\frac{1}{2}(3^5-1)}{3-1}+5\right\}=2\times\left(\frac{121}{2}+5\right)=\boxed{131}$이다.

$p=2,\ q=3,\ r=131$이므로 $p+q+r=136$

13. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2-8x+6$이므로

점 P$(1, -5)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=x-6$

점 Q의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면

$f(t)=t-6$

$t^3-4t^2+5t-2=0,\ (t-1)^2(t-2)=0$

점 Q는 점 P가 아닌 점이므로 $t=2$이다.

점 Q$(2, -4)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=2x-8$

이 직선의 x절편은 4, y절편은 -8이므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times|-8|=16$

14. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 함수를 추론한다.

실수 k에 대하여

(i) $k=0$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해는 $x=0$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 0 또는 $\frac{7}{4}\pi$로 2개다.

(ii) $0<k<3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해의 합은 π

① $\pi\le x\le 2\pi$에서 방정식 $a\cos x+b=k$의 해가 존재하면 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 2π 이상이다.

② $\pi\le x\le 2\pi$에서 방정식 $a\cos x+b=k$의 해가 존재하지 않으면 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 π이다.

그러므로 조건을 만족시키는 실수 t는 존재하지 않는다.

(iii) $k=3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해는 $x=\frac{\pi}{2}$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는

모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 $\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi$로 2개다.

(iv) $k<0$ 또는 $k>3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해가 존재하지 않으므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=k$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 $\frac{7}{4}\pi$로 1개다.

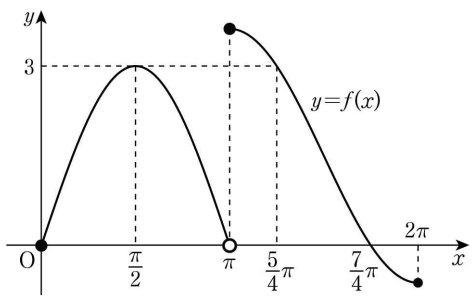
(ⅰ)~(iv)에서 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$이고 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$인 경우에만 조건을 만족시킨다.

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=a\cos\frac{5}{4}\pi+b=-\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=3 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=a\cos\frac{7}{4}\pi+b=\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=0 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서 $a^2+b^2=\frac{9}{2}+\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$



15. [출제의도] 도함수를 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}\left(-xf(x)-ax^2\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{4}f(x)-bx^2\right)=\frac{1}{4}f(0)$$

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)$에서

$f(0)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{-hf(h)-ah^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\left(-f(h)-ah\right)$$
$$=-f(0)=0$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{1}{4}f(h)-bh^2}{h}$$
$$=\frac{1}{4}f'(0)$$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$에서

$f'(0)=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $f(x)=x^3+px^2$을 만족시키는 실수 p가 존재한다.

$g_1(x)=-xf(x)-ax^2=-x^4-px^3-ax^2$,

$g_2(x)=\frac{1}{4}f(x)-bx^2=\frac{1}{4}x^3+\left(\frac{p}{4}-b\right)x^2$

이라 하자.

$x\le 0$에서 $\lim_{x\to -\infty}g(x)=-\infty$이고 $g(0)=0$이므로

$g(\alpha)=-27$을 만족시키는 실수 α가 구간 $(-\infty,0)$에 적어도 하나 존재한다.

$g_1'(x)=-x(4x^2+3px+2a)$이고 조건 (나)에서

$g'(\alpha)=0$이므로 실수 β가 존재하여

α, β는 이차방정식 $4x^2+3px+2a=0$의 근이다.

(ⅰ) $\beta<\alpha<0$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty,\beta)$에서 증가하고 구간 (β,α)에서 감소하므로 $g(k)=-27$이지만 $g'(k)\ne 0$인 실수 k가 구간 $(-\infty,\beta)$에 존재하여 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\alpha<\beta<0$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 (α,β)에서 감소하고 구간 $(\beta,0)$에서 증가하며 $g(0)=0$이므로 $g(k)=-27$이지만 $g'(k)\ne 0$인 실수 k가 구간 $(\beta,0)$에 존재하여 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\alpha<0\le\beta$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 $(\alpha,0)$에서 감소하므로 $g(\alpha)=-27$이고 $g(0)=0$인 것에 모순이다.

(ⅰ)~(iii)에서 조건을 만족시키기 위해서는 $\beta=\alpha$이어야 한다.

이차방정식 $4x^2+3px+2a=0$의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$2\alpha=-\frac{3}{4}p,\ \alpha^2=\frac{a}{2}$$

$$p=-\frac{8}{3}\alpha,\ a=2\alpha^2$$

$$g(\alpha)=-\alpha^4+\frac{8}{3}\alpha^4-2\alpha^4=-\frac{1}{3}\alpha^4=-27$$

$\alpha^4=81$, $\alpha=3$ 또는 $\alpha=-3$

$\alpha<0$이므로 $\alpha=-3$이고 $p=8$, $a=18$

$x\le 0$에서 $g(x)=-27$을 만족시키는 x의 값은 α뿐이므로 조건 (가)에 의하여 $\gamma>0$인 실수 γ가 존재하여 $g(\gamma)=-27$, $g'(\gamma)=0$을 만족시킨다.

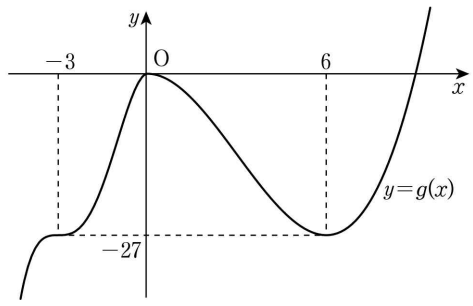
$g_2'(x)=\frac{3}{4}x^2+(4-2b)x=0$에서

$$\gamma=\frac{8}{3}(b-2)$$

$$g(\gamma)=g\left(\frac{8}{3}(b-2)\right)=-\frac{64}{27}(b-2)^3=-27$$

$$b-2=\frac{9}{4},\ b=\frac{17}{4}$$

따라서 $a+b=18+\frac{17}{4}=\frac{89}{4}$



16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 항을 구한다.

$n=1$일 때, $a_2=a_1^2-3\times 1=3^2-3=6$

$n=2$일 때, $a_3=a_2^2-3\times 2=6^2-6=30$

따라서 $a_3=30$

17. [출제의도] 부정적분을 이용하여 함숫값을 계산한다.

$$F(x)=\int(4x^3-3x^2+2)\,dx$$
$$=x^4-x^3+2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$F(1)=2+C=5$이므로 $C=3$이다.

따라서 $F(2)=12+C=15$

18. [출제의도] 코사인법칙을 이해하여 변의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$$
$$=6^2+8^2-2\times 6\times 8\times\left(-\frac{1}{4}\right)=124$$

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2-12x+a$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 $f'(1)=0$

$a=9$

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 5를 가지므로

$f(3)=27-54+27+b=5$에서

$b=5$

따라서 $a+b=9+5=14$

20. [출제의도] 수열의 성질을 이용하여 수열의 합에 대한 문제를 해결한다.

자연수 t에 대하여

$$a_{5t-4}+a_{5t-3}+a_{5t-2}+a_{5t-1}+a_{5t}$$
$$=(5t-4)+(5t-3)+(5t-2)+(5t-1)+\{(-4)\times 5t+10\}$$
$$=20t-10+(-20t+10)=0$$

$$\sum_{k=1}^{5t}a_k=\sum_{k=1}^{t}\left(a_{5k-4}+a_{5k-3}+a_{5k-2}+a_{5k-1}+a_{5k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{t}0=0$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\begin{cases}5t-4 & (m=5t-4)\\ 10t-7 & (m=5t-3)\\ 15t-9 & (m=5t-2)\\ 20t-10 & (m=5t-1)\\ 0 & (m=5t)\end{cases}$$

(ⅰ) $m=5t-4$이면 $20\le 5t-4<30$에서 $t=5$, 6이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 21, 26이다.

(ⅱ) $m=5t-3$이면 $20\le 10t-7<30$에서 $t=3$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 12이다.

(iii) $m=5t-2$이면 $20\le 15t-9<30$에서 $t=2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 8이다.

(iv) $m=5t-1$이면 $20\le 20t-10<30$에서 $\frac{3}{2}\le t<2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(iv)에서 모든 자연수 m의 값의 합은

$21+26+12+8=67$

21. [출제의도] 정적분을 이용하여 함수를 추론한다.

$g(x)=\int_0^x(f(t)-|f(t)|)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f(x)-|f(x)|$이므로

$$g'(x)=\begin{cases}2f(x) & (f(x)<0)\\ 0 & (f(x)\ge 0)\end{cases}$$

조건 (가)에서 $x\ge 2$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고 충분히 작은 양수 h에 대하여 열린구간 $(2-h,2)$에서 $f(x)<0$이다.

삼차함수 $f(x)$의 부호가 $x=2$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌어야 하므로 $f(2)=0$이다.

$f(x)$는 최고차항이 1인 삼차함수이고

$f(0)=0$, $f(2)=0$이며 $x\ge 2$에서 $f(x)\ge 0$이므로

$f(x)=x(x-2)(x-a)$를 만족시키는 실수 $a\,(a<2)$가 존재한다.

(ⅰ) $0<a<2$인 경우

$0<x\le a$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고

$a<x<2$인 모든 x에 대하여 $f(x)<0$이므로

$$g(2)=\int_0^2(f(t)-|f(t)|)\,dt$$
$$=\int_0^a 0\,dt+\int_a^2 2f(t)\,dt$$

$$= \int_a^2 2t(t-2)(t-a)\,dt$$

$$= \int_a^2 \{2t^3-(2a+4)t^2+4at\}dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2a+4}{3}t^3+2at^2\right]_a^2$$

$$= \frac{1}{6}a^4-\frac{2}{3}a^3+\frac{8}{3}a-\frac{8}{3}$$

$h(x)=\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{3}x-\frac{8}{3}$ 이라 하면

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{40}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^p=\frac{1}{2^p}=40$

따라서 $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p=2\times 40=80$

는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

남은 2개의 원소는 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중 하나의 원소이므로 이 세 집합을 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$

구하는 순서쌍의 개수는 $3\times 9=27$

(iii) $n(A\cap B)=6$인 경우

$A\cap B=U$이므로 구하는 순서쌍의 개수는 1

(ⅰ), (ⅱ), (iii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는 $243+27+1=271$

[기하]

23	①	*24*	③	*25*	②	*26*	④	*27*	⑤
28	③	*29*	12	*30*	52				

23. [출제의도] 포물선의 방정식을 계산하여 준선의 방정식을 구한다.

$y^2=20x=4\times5\times x$ 이므로 포물선 $y^2=20x$ 의 준선은 $x=-5$ 이다. 따라서 $k=-5$

28. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이용하여 원의 반지름의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

원 C의 반지름의 길이를 r이라 하자.

$\overline{PQ}+\overline{FQ}=1$ 이므로 $\overline{FQ}=1-r$

두 점 P, Q는 쌍곡선 위의 점이고 $\overline{FP}=\overline{QP}=r$ 이므로

$\overline{F'P}-\overline{FP}=\overline{FQ}-\overline{F'Q}$, $(\overline{F'Q}+\overline{QP})-\overline{FP}=\overline{FQ}-\overline{F'Q}$

$(2c)^2=4^2+4^2-2\times4\times4\times\frac{1}{3}$, $4c^2=\frac{\cdot}{3}$, $c=\frac{\cdot}{3}$

직각삼각형 PF′F 에서 $\sin(\angle F'FP)=\frac{\overline{F'P}}{\overline{FP}}=\frac{1}{2}$ 이므로

$\angle F'FP=\frac{\pi}{6}$

$\overline{FA}=c+a=(\sqrt{3}+1)a$

$\overline{AH}=\overline{FA}\times\sin(\angle AFH)=\frac{(\sqrt{3}+1)a}{2}$

$\overline{FH}=\overline{FA}\times\cos(\angle AFH)=\frac{(3+\sqrt{3})a}{2}$

점 H와 점 Q는 타원 위의 점이므로
$\overline{AQ}+\overline{FQ}=\overline{AH}+\overline{FH}=(2+\sqrt{3})a$
점 Q는 쌍곡선 위의 점이므로 $\overline{F'Q}-\overline{FQ}=2a$
$\overline{AQ}+\overline{F'Q}=(\overline{AQ}+\overline{FQ})+(\overline{F'Q}-\overline{FQ})=(4+\sqrt{3})a$
$(4+\sqrt{3})a=6+8\sqrt{3}$ 이므로 $a=2\sqrt{3}$
타원의 장축의 길이는 $(2+\sqrt{3})a=6+4\sqrt{3}$ 이므로
$p=6,\ q=4$
따라서 $p^2+q^2=36+16=52$