• 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정 답

1	③	2	⑤	3	①	4	②	5	⑤
6	④	7	④	8	①	9	③	10	②
11	⑤	12	①	13	⑤	14	②	15	③
16	30	17	15	18	124	19	14	20	67
21	48	22	80						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$4^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2^1=2$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=4x+1$ 이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4+1=5$

3. [출제의도] 등차수열을 이해하여 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$2a_2+a_7=2(2+d)+(2+6d)=6+8d=30$

$d=3$

$a_{10}=2+9d=2+9\times 3=29$

4. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax^2-2)=4a-2$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)=6$

$4a-2=6,\ a=2$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=(x+1)'(2x^2-5x+1)+(x+1)(2x^2-5x+1)'$

$=1\times(2x^2-5x+1)+(x+1)(4x-5)$

이므로

$f'(2)=-1+9=8$

6. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 주어진 값을 구한다.

a가 양수이므로

$\log_3 a^2=2\log_3 a=4,\ \log_3 a=2,\ a=3^2$

$a=9$

$\log_9 ab=\log_9 9b=1+\log_9 b=\frac{5}{2},\ \log_9 b=\frac{3}{2},\ b=9^{\frac{3}{2}}$

$b=27$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{27}{9}=3$

7. [출제의도] 정적분을 이해하여 직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$0\le x\le 2$에서 $x^2\ge x-2$이므로 구하는 부분의 넓이는

$\int_0^2\{x^2-(x-2)\}dx=\int_0^2(x^2-x+2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}-2+4=\frac{14}{3}$

8. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{\cos\theta}{4}\right)^2+\cos^2\theta=\frac{17}{16}\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{16}{17}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\frac{4\sqrt{17}}{17}$

9. [출제의도] 함수의 극값을 이해하여 함수의 최댓값을 구한다.

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(2)=16-12-24+a=-20+a=4$

$a=24$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+24$이므로

$f(1)=2-3-12+24=11$

$f(3)=54-27-36+24=15$

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 15이므로

$M=15$

10. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$y=\log_2(x-k)$에 $y=0$을 대입하면 $0=\log_2(x-k)$

$2^0=1=x-k,\ x=k+1$

이므로 A$(k+1, 0)$

점 B의 x좌표를 t라 하면 점 B의 y좌표는 2이므로

$\log_2(t-k)=2,\ 2^2=t-k,\ t=k+4$

이므로 B$(k+4, 2)$

점 C는 직선 $y=2$가 y축과 만나는 점이므로 C$(0, 2)$

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

선분 BC의 중점을 M이라 할 때

$\overline{AM}\perp\overline{BC}$이고 점 M의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같다.

M$\left(\frac{k+4}{2}, 2\right)$이므로

$\frac{k+4}{2}=k+1,\ k+4=2k+2,\ k=2$

그러므로 A$(3, 0)$, B$(6, 2)$, C$(0, 2)$, M$(3, 2)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AM}=\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$

11. [출제의도] 정적분을 이해하여 점의 위치와 움직인 거리를 구한다.

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는

$0+\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1(3t^2-24t+36)\,dt$

$=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^1=25$ (참)

ㄴ. $v(t)=3(t^2-8t+12)=3(t-2)(t-6)$

시각 $t=2$, $t=6$일 때 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다. (참)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^3|v(t)|\,dt=\int_0^3|3t^2-24t+36|\,dt$

$=\int_0^2(3t^2-24t+36)\,dt+\int_2^3\{-(3t^2-24t+36)\}\,dt$

$=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^2+\left[-t^3+12t^2-36t\right]_2^3$

$=(32-0)+\{-27-(-32)\}=37$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12. [출제의도] 등비수열을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$n=1$일 때, $\frac{a_1}{b_1+1}=2$에서 $b_1=\frac{1}{2}$이다.

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{a_n}{b_n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}$이므로

$=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$\frac{a_n}{b_n+1}=\boxed{2}\times n$ …… ㉠

이다.

$n=1$일 때도 ㉠이 성립하므로

모든 자연수 n에 대하여

$\frac{a_n}{n}=\boxed{2}\times(b_n+1)$ …… ㉡

이다.

$n=2$일 때, $\frac{a_2}{2}=2\times(b_2+1)$에서 $b_2=\frac{3}{2}$이다.

그러므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\boxed{3}$이다.

따라서 ㉡에 의하여

$\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}=2\times\sum_{n=1}^{5}(b_n+1)=2\times\left(\sum_{n=1}^{5}b_n+\sum_{n=1}^{5}1\right)$

$=2\times\left\{\frac{\frac{1}{2}(3^5-1)}{3-1}+5\right\}=2\times\left(\frac{121}{2}+5\right)=\boxed{131}$이다.

$p=2,\ q=3,\ r=131$이므로 $p+q+r=136$

13. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2-8x+6$이므로

점 P$(1, -5)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=x-6$

점 Q의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면

$f(t)=t-6$

$t^3-4t^2+5t-2=0,\ (t-1)^2(t-2)=0$

점 Q는 점 P가 아닌 점이므로 $t=2$이다.

점 Q$(2, -4)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=2x-8$

이 직선의 x절편은 4, y절편은 -8이므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times|-8|=16$

14. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 함수를 추론한다.

실수 k에 대하여

(i) $k=0$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해는 $x=0$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 0 또는 $\frac{7}{4}\pi$로 2개다.

(ii) $0<k<3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해의 합은 π

① $\pi\le x\le 2\pi$에서 방정식 $a\cos x+b=k$의 해가 존재하면 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 2π 이상이다.

② $\pi\le x\le 2\pi$에서 방정식 $a\cos x+b=k$의 해가 존재하지 않으면 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 π이다.

그러므로 조건을 만족시키는 실수 t는 존재하지 않는다.

(iii) $k=3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해는 $x=\frac{\pi}{2}$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는

모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 $\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi$로 2개다.

(iv) $k<0$ 또는 $k>3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해가 존재하지 않으므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=k$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 $\frac{7}{4}\pi$로 1개다.

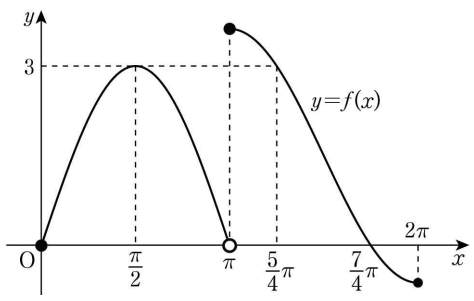
(ⅰ)~(iv)에서 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$이고 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$인 경우에만 조건을 만족시킨다.

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=a\cos\frac{5}{4}\pi+b=-\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=3 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=a\cos\frac{7}{4}\pi+b=\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=0 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서 $a^2+b^2=\frac{9}{2}+\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$



15. [출제의도] 도함수를 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}\left(-xf(x)-ax^2\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{4}f(x)-bx^2\right)=\frac{1}{4}f(0)$$

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)$에서

$f(0)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{-hf(h)-ah^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\left(-f(h)-ah\right)$$
$$=-f(0)=0$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{1}{4}f(h)-bh^2}{h}$$
$$=\frac{1}{4}f'(0)$$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$에서

$f'(0)=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $f(x)=x^3+px^2$을 만족시키는 실수 p가 존재한다.

$g_1(x)=-xf(x)-ax^2=-x^4-px^3-ax^2$,

$g_2(x)=\frac{1}{4}f(x)-bx^2=\frac{1}{4}x^3+\left(\frac{p}{4}-b\right)x^2$

이라 하자.

$x\le 0$에서 $\lim_{x\to -\infty}g(x)=-\infty$이고 $g(0)=0$이므로

$g(\alpha)=-27$을 만족시키는 실수 α가 구간 $(-\infty,0)$에 적어도 하나 존재한다.

$g_1'(x)=-x(4x^2+3px+2a)$이고 조건 (나)에서

$g'(\alpha)=0$이므로 실수 β가 존재하여

α, β는 이차방정식 $4x^2+3px+2a=0$의 근이다.

(ⅰ) $\beta<\alpha<0$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty,\beta)$에서 증가하고 구간 (β,α)에서 감소하므로 $g(k)=-27$이지만 $g'(k)\ne 0$인 실수 k가 구간 $(-\infty,\beta)$에 존재하여 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\alpha<\beta<0$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 (α,β)에서 감소하고 구간 $(\beta,0)$에서 증가하며 $g(0)=0$이므로 $g(k)=-27$이지만 $g'(k)\ne 0$인 실수 k가 구간 $(\beta,0)$에 존재하여 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\alpha<0\le\beta$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 $(\alpha,0)$에서 감소하므로 $g(\alpha)=-27$이고 $g(0)=0$인 것에 모순이다.

(ⅰ)~(iii)에서 조건을 만족시키기 위해서는 $\beta=\alpha$이어야 한다.

이차방정식 $4x^2+3px+2a=0$의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$2\alpha=-\frac{3}{4}p,\ \alpha^2=\frac{a}{2}$$

$$p=-\frac{8}{3}\alpha,\ a=2\alpha^2$$

$$g(\alpha)=-\alpha^4+\frac{8}{3}\alpha^4-2\alpha^4=-\frac{1}{3}\alpha^4=-27$$

$\alpha^4=81$, $\alpha=3$ 또는 $\alpha=-3$

$\alpha<0$이므로 $\alpha=-3$이고 $p=8$, $a=18$

$x\le 0$에서 $g(x)=-27$을 만족시키는 x의 값은 α뿐이므로 조건 (가)에 의하여 $\gamma>0$인 실수 γ가 존재하여 $g(\gamma)=-27$, $g'(\gamma)=0$을 만족시킨다.

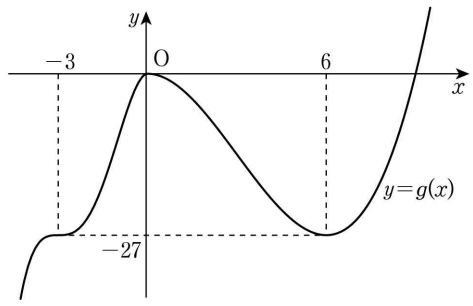
$g_2'(x)=\frac{3}{4}x^2+(4-2b)x=0$에서

$$\gamma=\frac{8}{3}(b-2)$$

$$g(\gamma)=g\left(\frac{8}{3}(b-2)\right)=-\frac{64}{27}(b-2)^3=-27$$

$$b-2=\frac{9}{4},\ b=\frac{17}{4}$$

따라서 $a+b=18+\frac{17}{4}=\frac{89}{4}$



16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 항을 구한다.

$n=1$일 때, $a_2=a_1^2-3\times 1=3^2-3=6$

$n=2$일 때, $a_3=a_2^2-3\times 2=6^2-6=30$

따라서 $a_3=30$

17. [출제의도] 부정적분을 이용하여 함숫값을 계산한다.

$$F(x)=\int(4x^3-3x^2+2)\,dx$$
$$=x^4-x^3+2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$F(1)=2+C=5$이므로 $C=3$이다.

따라서 $F(2)=12+C=15$

18. [출제의도] 코사인법칙을 이해하여 변의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$$
$$=6^2+8^2-2\times 6\times 8\times\left(-\frac{1}{4}\right)=124$$

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2-12x+a$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 $f'(1)=0$

$a=9$

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 5를 가지므로

$f(3)=27-54+27+b=5$에서

$b=5$

따라서 $a+b=9+5=14$

20. [출제의도] 수열의 성질을 이용하여 수열의 합에 대한 문제를 해결한다.

자연수 t에 대하여

$$a_{5t-4}+a_{5t-3}+a_{5t-2}+a_{5t-1}+a_{5t}$$
$$=(5t-4)+(5t-3)+(5t-2)+(5t-1)+\{(-4)\times 5t+10\}$$
$$=20t-10+(-20t+10)=0$$

$$\sum_{k=1}^{5t}a_k=\sum_{k=1}^{t}\left(a_{5k-4}+a_{5k-3}+a_{5k-2}+a_{5k-1}+a_{5k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{t}0=0$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\begin{cases}5t-4 & (m=5t-4)\\ 10t-7 & (m=5t-3)\\ 15t-9 & (m=5t-2)\\ 20t-10 & (m=5t-1)\\ 0 & (m=5t)\end{cases}$$

(ⅰ) $m=5t-4$이면 $20\le 5t-4<30$에서 $t=5$, 6이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 21, 26이다.

(ⅱ) $m=5t-3$이면 $20\le 10t-7<30$에서 $t=3$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 12이다.

(iii) $m=5t-2$이면 $20\le 15t-9<30$에서 $t=2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 8이다.

(iv) $m=5t-1$이면 $20\le 20t-10<30$에서 $\frac{3}{2}\le t<2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(iv)에서 모든 자연수 m의 값의 합은

$21+26+12+8=67$

21. [출제의도] 정적분을 이용하여 함수를 추론한다.

$g(x)=\int_0^x(f(t)-|f(t)|)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f(x)-|f(x)|$이므로

$$g'(x)=\begin{cases}2f(x) & (f(x)<0)\\ 0 & (f(x)\ge 0)\end{cases}$$

조건 (가)에서 $x\ge 2$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고 충분히 작은 양수 h에 대하여 열린구간 $(2-h,2)$에서 $f(x)<0$이다.

삼차함수 $f(x)$의 부호가 $x=2$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌어야 하므로 $f(2)=0$이다.

$f(x)$는 최고차항이 1인 삼차함수이고

$f(0)=0$, $f(2)=0$이며 $x\ge 2$에서 $f(x)\ge 0$이므로

$f(x)=x(x-2)(x-a)$를 만족시키는 실수 $a\,(a<2)$가 존재한다.

(ⅰ) $0<a<2$인 경우

$0<x\le a$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고

$a<x<2$인 모든 x에 대하여 $f(x)<0$이므로

$$g(2)=\int_0^2(f(t)-|f(t)|)\,dt$$
$$=\int_0^a 0\,dt+\int_a^2 2f(t)\,dt$$

$$= \int_a^2 2t(t-2)(t-a)\,dt$$

$$= \int_a^2 \{2t^3-(2a+4)t^2+4at\}dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2a+4}{3}t^3+2at^2\right]_a^2$$

$$= \frac{1}{6}a^4-\frac{2}{3}a^3+\frac{8}{3}a-\frac{8}{3}$$

$h(x)=\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{3}x-\frac{8}{3}$ 이라 하면

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{40}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^p=\frac{1}{2^p}=40$

따라서 $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p=2\times 40=80$

는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

남은 2개의 원소는 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중 하나의 원소이므로 이 세 집합을 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$

구하는 순서쌍의 개수는 $3\times 9=27$

(iii) $n(A\cap B)=6$인 경우

$A\cap B=U$이므로 구하는 순서쌍의 개수는 1

(ⅰ), (ⅱ), (iii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는 $243+27+1=271$

[미적분]

23	③	*24*	④	*25*	①	*26*	②	*27*	⑤
28	③	*29*	11	*30*	57				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(12n+1)}{4n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^3+n^2}{4n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n^3}}=3$$

24. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(3n+2)a_n\times\frac{b_n}{n}\times\frac{n}{3n+2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n}}$$

$$=6\times2\times\frac{1}{3}=4$$

25. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$n\ge2$일 때, $a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

26. [출제의도] 등비수열의 극한을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 합을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+2a\times\left(\frac{2}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{a}\right)^n}$$

(i) $a>2$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{a}\right)^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=5$

$5=a+1$에서 $a=4$

(ii) $a=2$인 경우

$\frac{3n^2+1}{n^2}<\frac{1}{a_n^2}<\frac{3n^2+2n}{n^2+2n+1}$

$\frac{4n+3}{n^2+2n+1}<3-\frac{1}{a_n^2}<\frac{4n-1}{n^2}$

$\frac{4n^2+3n}{n^2+2n+1}<n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)<\frac{4n^2-n}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{n^2+2n+1}=4$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{n^2}=4$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)=4$

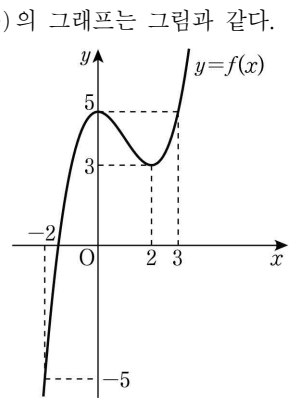
28. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 추론하여 함숫값을 구한다.

$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-3x=\frac{3}{2}x(x-2)=0$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 5, $x=2$에서 극솟값 3을 갖는다.

$f(x)=5$에서 $x^2(x-3)=0$, $x=0$ 또는 $x=3$이고

$f(x)=-5$에서 $(x+2)(x^2-5x+10)=0$, $x=-2$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



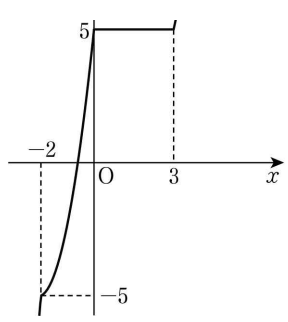
$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)=5$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{\{f(x)\}^{2n}+5^{2n}}$에서

(i) $|f(x)|>5$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}=0$이므로

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+g(x)\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}}=f(x)$$



직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$에서 모든 자연수 n에 대하여

$k-1<k-\frac{1}{2^n}<k$이다.

두 점 $(-2,-5)$, $(0,5)$를 지나는 직선의 기울기가 5이고 $\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\left(\frac{p}{2}x+\frac{q}{2}\right)=\frac{q}{2}$이다.

$k\le5$일 때,

$\lim_{x\to-2-}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}=\lim_{x\to-2-}\frac{1}{2}(x^2-5x+10)=12$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

$5<k\le\frac{q}{2}$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=4$, $\lim_{n\to\infty}a_n=4$이다.

$k>\frac{q}{2}$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}a_n=3$이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$가 되도록 하는 자연수 k의 개수가 7이므로 $5<k\le\frac{q}{2}$에서 $12\le\frac{q}{2}<13$, $24\le q<26$이다.

q가 자연수이므로 $q=24$ 또는 $q=25$이고,

$p=\frac{q-10}{2}$에서 p가 자연수이므로 $p=7$, $q=24$이다.

$h(4)=f(4)=32-24+5=13$이므로 $p+q+h(4)=44$

29. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

삼각형 ABC가 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이고 점 P가 선분 AB의 중점이므로 $\angle CPB=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 CPB에서 $\overline{BP}^2=\overline{BC}^2-\overline{CP}^2=n^2$이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=n$

두 점 P, Q가 각각 선분 AB, 선분 BC의 중점이므로 두 선분 PQ와 AC는 서로 평행하고 $\angle CAB=\angle QPB$

$\angle CAB=\angle PQR$이므로 $\angle QPB=\angle PQR$

엇각의 크기가 같으므로 두 선분 AB와 DQ는 서로 평행하고, $\angle ABC=\angle RQC$이다. 점 Q가 선분 BC의 중점이므로 점 R은 선분 AC의 중점이다.

삼각형 CRQ와 삼각형 CAB는 서로 닮음인 삼각형이고 닮음비가 $1:2$이므로 $\overline{RQ}=n$, $\overline{CQ}=2n+1$

$\overline{DR}=x$, $\overline{DC}=2x\ (x>0)$이라 하자.

직각삼각형 CPB에서 $\cos(\angle PBC)=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BC}}=\dfrac{n}{4n+2}$

$\angle PBC=\angle DQC$이므로 삼각형 CDQ에서 코사인법칙에 의해 $\overline{CD}^2=\overline{DQ}^2+\overline{CQ}^2-2\times\overline{DQ}\times\overline{CQ}\times\cos(\angle DQC)$

$(2x)^2=(x+n)^2+(2n+1)^2-2(x+n)(2n+1)\cos(\angle PBC)$

$3x^2-nx-4n^2-4n-1=0$

$x>0$이므로 $\overline{DR}=x=\dfrac{n+\sqrt{49n^2+48n+12}}{6}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{DR}-\frac{4}{3}n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\sqrt{49n^2+48n+12}-7n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{48n+12}{\sqrt{49n^2+48n+12}+7n}\right)$$
$$=\frac{4}{7}$$

따라서 $p=7$, $q=4$이므로 $p+q=11$

30. [출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.

$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n$의 값이 존재하므로

$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n=0$ 또는 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n=1$

(ⅰ) $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n=1$인 경우

$\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|=1$, $a+b=1$, $|a|=1$을 모두 만족시켜야 한다. $a+b=1$에서 $\dfrac{|2\times1-20|}{|k|}=1$, 즉 $k=18$

$k=18$일 때 $a+b=1$, $|a|=1$을 만족시키는 정수 (a, b)의 순서쌍은 $(-1, 2)$와 $(1, 0)$ 뿐이므로 정수 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수는 2이다.

(ⅱ) $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n=0$인 경우

$\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=0$이므로 $a+b=0\ (a\neq0)$ 또는 $a=0$

$\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|<1$에서 $|2a+2b-20|<k\leq20$

$a+b=0\ (a\neq0)$일 때, 부등식을 만족시키지 못한다.

$a=0$일 때, $|2b-20|<k$ 즉 $10-\dfrac{k}{2}<b<10+\dfrac{k}{2}$

k가 홀수인 경우, 부등식을 만족시키는 정수 b의 개수는 k이고

k가 짝수인 경우, 부등식을 만족시키는 정수 b의 개수는 $k-1$이다.

$k=18$, $k=19$, $k=20$인 경우 조건을 만족시키는 정수 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수는 각각 17, 19, 19이다.

$k\leq17$인 경우 조건을 만족시키는 정수 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수는 17 이하이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 k의 값은 18, 19, 20이므로 $18+19+20=57$

24. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 두 초점 사이의 거리를 구한다.

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{25}=1$의 단축의 길이가 6이므로

$2a=6$, $a=3$

타원의 두 초점의 좌표를 $(0, c)$, $(0, -c)\ (c>0)$

이라 하면 $c^2=25-a^2=16$, $c=4$

따라서 타원의 두 초점 사이의 거리는 $2c=8$

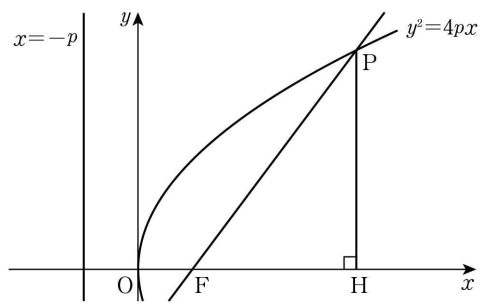
25. [출제의도] 쌍곡선의 점근선의 방정식을 이해하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구한다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5a^2}-\dfrac{y^2}{a^2+1}=1$의 점근선 중 기울기가 음수인 점근선의 방정식은 $y=-\sqrt{\dfrac{a^2+1}{5a^2}}\,x$이므로

$-\sqrt{\dfrac{a^2+1}{5a^2}}=-\dfrac{1}{2}$, $4(a^2+1)=5a^2$, $a=2\ (a>0)$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\times\sqrt{5a^2}=4\sqrt{5}$

26. [출제의도] 포물선의 정의를 이해하여 미지수의 값을 구한다.



포물선의 초점을 $F(p, 0)$이라 하자.

이 포물선의 준선은 $x=-p$이다.

점 P와 포물선의 준선 사이의 거리가 20이고

점 P는 포물선 위의 점이므로 $\overline{FP}=20$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직선 FP의 기울기가 $\dfrac{4}{3}$이므로

$\overline{FH}=3a$, $\overline{PH}=4a\ (a>0)$이라 하자.

$\overline{FP}^2=\overline{FH}^2+\overline{PH}^2$에서

$20^2=(3a)^2+(4a)^2$, $25a^2=400$, $a=4$

즉 $\overline{FH}=3a=3\times4=12$

점 P와 포물선의 준선 사이의 거리가

점 H와 포물선의 준선 사이의 거리와 같으므로

$2p+\overline{FH}=20$, $2p+12=20$, $p=4$

27. [출제의도] 타원의 정의를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$\overline{FP}:\overline{FQ}=1:2$에서 $\overline{FP}=t$, $\overline{FQ}=2t\ (t>0)$이라 하자.

$\overline{F'P}:\overline{F'Q}=3:2$에서 $\overline{F'P}=3s$, $\overline{F'Q}=2s\ (s>0)$이라 하자.

두 점 P, Q는 모두 타원 위의 점이므로

$\overline{FP}+\overline{F'P}=t+3s=8$ …… ㉠

$\overline{FQ}+\overline{F'Q}=2t+2s=8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $t+3s=2t+2s$, 즉 $t=s=2$

$\overline{F'P}=3s=6$, $\overline{PQ}=3t=6$, $\overline{F'Q}=2s=4$이므로

삼각형 F′QP는 $\overline{F'P}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이다.

$\cos(\angle F'QP)=\dfrac{1}{3}$이므로

삼각형 FF′Q에서 코사인법칙에 의해

$\overline{FF'}^2=\overline{FQ}^2+\overline{F'Q}^2-2\times\overline{FQ}\times\overline{F'Q}\times\cos(\angle F'QF)$

$2\times\overline{F'Q}=\overline{FQ}$에서 $\overline{F'Q}=\dfrac{1-r}{2}$

즉 $\overline{F'P}=\overline{F'Q}+\overline{QP}=\dfrac{1-r}{2}+r=\dfrac{1+r}{2}$

삼각형 FPF′은 $\angle F'FP=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\cos(\angle FPF')=\dfrac{\overline{FP}}{\overline{F'P}}=\dfrac{r}{\frac{1+r}{2}}=\dfrac{2r}{1+r}$

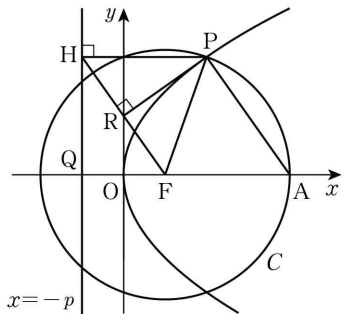
삼각형 FPQ에서 코사인법칙에 의해

$\overline{FQ}^2=\overline{FP}^2+\overline{QP}^2-2\times\overline{FP}\times\overline{QP}\times\cos(\angle FPF')$

$(1-r)^2=r^2+r^2-2\times r\times r\times\dfrac{2r}{1+r}$, $3r^3-3r^2-r+1=0$

$(3r^2-1)(r-1)=0$, $0<r<1$이므로 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

29. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 미지수를 구하는 문제를 해결한다.



점 P는 포물선 위의 점이므로 $\overline{PH}=\overline{FP}=r$

선분 PH와 선분 FA는 평행하고 $\overline{PH}=\overline{FP}=\overline{FA}=r$

이므로 사각형 APHF는 평행사변형이다.

포물선의 준선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자.

$\angle QFH=\angle PHF$이고, $\overline{FQ}=2p$이므로

$\overline{FH}=\dfrac{\overline{FQ}}{\cos(\angle QFH)}=2\sqrt{3}p$

$\sin^2(\angle PHF)=1-\cos^2(\angle PHF)=\dfrac{2}{3}$, $\sin(\angle PHF)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

평행사변형 APHF의 넓이는 삼각형 FPH의 넓이의 2배이므로

$2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{PH}\times\overline{FH}\times\sin(\angle PHF)=54\sqrt{2}$

$2\times\dfrac{1}{2}\times r\times2\sqrt{3}p\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=54\sqrt{2}$, $rp=27$ …… ㉢

삼각형 PHF는 $\overline{PH}=\overline{FP}$인 이등변삼각형이므로

점 P에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 R이라 하면

$\overline{HR}=\dfrac{1}{2}\times\overline{FH}=\sqrt{3}p$

삼각형 PHR에서

$\cos(\angle PHR)=\dfrac{\overline{HR}}{\overline{PH}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}p}{r}$, $r=3p$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $3p^2=27$이므로 $p=3$, $r=9$

따라서 $p+r=12$

30. [출제의도] 쌍곡선과 타원의 관계를 추론하여 타원의 장축의 길이를 구한다.

쌍곡선의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2a^2}=1$에서

$c^2=a^2+2a^2=3a^2$, $c=\sqrt{3}a$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2a^2}=1$에서 $x=-\sqrt{3}a$일 때 $y=\pm2a$

그러므로 $\overline{F'P}=2a$

점 P가 쌍곡선 위의 점이고 쌍곡선의 주축의 길이가 $2a$이므로 $\overline{FP}-\overline{F'P}=2a$, $\overline{FP}=4a$